

# CNR-IRCrES Working Paper

## Unexpected loss multiperiodale e pricing del rischio di credito



12/2020

**Franco Varetto**

*Direttore* Emanuela Reale

*Direzione* CNR-IRCrES  
*Istituto di Ricerca sulla Crescita Economica Sostenibile*  
Via Real Collegio 30, 10024 Moncalieri (Torino), Italy  
Tel. +39 011 6824911 / Fax +39 011 6824966  
segreteria@ircres.cnr.it  
www.ircres.cnr.it

*Sede di Roma* Via dei Taurini 19, 00185 Roma, Italy  
Tel. +39 06 49937809 / Fax +39 06 49937808

*Sede di Milano* Via Corti 12, 20121 Milano, Italy  
Tel. +39 02 23699501 / Fax +39 02 23699530

*Sede di Genova* Università di Genova Via Balbi, 6 - 16126 Genova  
Tel. +39 010 2465459 / Fax +39 010 2099826

#### **Comitato Redazione**

Emanuela Reale, Giuseppe Giulio Calabrese, Grazia Biorci, Igor Benati, Antonella Emina, Serena Fabrizio, Lucio Morettini, Susanna Paleari, Anna Perin, Secondo Rolfo, Isabella Maria Zoppi.



[redazione@ircres.cnr.it](mailto:redazione@ircres.cnr.it)



[www.ircres.cnr.it/index.php/it/produzione-scientifica/pubblicazioni](http://www.ircres.cnr.it/index.php/it/produzione-scientifica/pubblicazioni)

The Working Papers published by CNR-IRCrES represent the views of the respective author(s) and not of the Institute as a whole.

CNR-IRCrES Working Paper 11/2020



novembre 2020 by CNR-IRCrES

# Unexpected loss multiperiodale e pricing del rischio di credito

---

Multiperiod unexpected loss and credit risk pricing

FRANCO VARETTO

CNR-IRCrES, Consiglio Nazionale delle Ricerche – Istituto di Ricerca sulla Crescita Economica Sostenibile, Italia

corresponding authors: [francoww@tin.it](mailto:francoww@tin.it)

## ABSTRACT

The banks' capital regulation is essentially static in nature and considers the regulatory requirement as the difference between two expected losses: the first is based on a stressed probability of default and the second is based on the expected probability of default. The framework defined in this paper considers the credit risk as the volatility of the discounted credit losses, that is coherent with the credit risk pricing. Nevertheless, there are some open questions in this framework, as the calibration of the capital requirement and the different kinds of correlations to be estimated.

KEYWORDS: credit risk, expected loss, unexpected loss, credit pricing, Basel capital accord, banks' regulation.

JEL CODES: C63, G21, G28, G32, G33

DOI: 10.23760/2421-7158.2020.012

## HOW TO CITE THIS ARTICLE

Varetto, F. (2020). *Unexpected loss multiperiodale e pricing del rischio di credito* (CNR-IRCrES Working Paper 12/2020). Istituto di Ricerca sulla Crescita Economica Sostenibile. Disponibile da <http://dx.doi.org/10.23760/2421-7158.2020.012>

---

## INDICE

1.	INTRODUZIONE .....	3
2.	CREDITO A 1 ANNO .....	4
3.	CREDITO A 2 ANNI .....	11
4.	CREDITO A 3 ANNI .....	17
5.	CREDITO A N ANNI.....	20
6.	EL E UL MULTIPERIODALI.....	21
7.	PORTAFOGLIO CREDITI E LE UL MULTIPERIODALI .....	22
8.	UL MULTIPERIODALE E L'APPROCCIO REGOLAMENTARE.....	26
9.	L'APPROCCIO REGOLAMENTARE E LA PD COME VARIABILE CASUALE.....	28
10.	CONCLUSIONI.....	35
11.	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....	36
12.	APPENDICE.....	37

## 1. INTRODUZIONE

Nella Regulation bancaria e nella valutazione dei rischi di credito nell'ambito della gestione delle banche il concetto di perdita inattesa (UL, unexpected loss) assume un'importanza cruciale. Com'è noto<sup>1</sup> in ogni periodo le banche sperimentano un flusso di perdite su crediti la cui entità dipende dalla frequenza con cui si manifestano le insolvenze e dalla gravità degli eventi creditizi. Su un ampio arco di tempo, sfruttando le serie storiche degli accadimenti riguardanti il portafoglio degli impieghi, le banche sono in grado di ottenere una stima statistica della perdita attesa su crediti (EL, expected loss); tale perdita attesa è alla base dello stanziamento degli accantonamenti per rischi da inserire nel conto economico e rappresenta un elemento da considerare nel pricing dei prestiti da applicare alla clientela.

In generale le perdite su crediti dei diversi periodi mettono in luce una certa variabilità, parte della quale dipende dallo stato del ciclo economico. Il calcolo della perdita inattesa (UL) si fonda sulla volatilità delle perdite rispetto alla perdita attesa (EL). Particolare rilievo assumono le perdite osservate oltre una certa soglia: è con riferimento ad esse che è stata costruita la base concettuale della regolamentazione bancaria.

Derivata dalla modellistica VaR applicata ai rischi di mercato, la UL è stata estesa ai rischi di credito ed incorporata, dopo un lungo processo di verifiche e calibrazioni, nelle formule regolamentari del cosiddetto accordo di Basilea II (BCBS, 2004). Limitatamente ai crediti "corporate" la formulazione che qui interessa considerare, riguardante l'approccio basato sui sistemi interni di rating (BCBS, 2004), può essere sintetizzata come segue:

- 1) Le attività ponderate per il rischio (RWA) sono uguali a  $K \cdot 12.5 \cdot EAD$ , ove EAD indica l'esposizione al rischio (Exposure At Default) e 12.5 è  $1/0.08$ , in cui 0.08 è il coefficiente da applicare alle RWA per determinare il capitale regolamentare necessario all'assorbimento dei rischi
- 2) K è il requisito patrimoniale ed è calcolato come:

$$K = \left[ LGD * \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} * \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}} \right] - PD * LGD \right] * \frac{1 + (M - 2.5) * b}{(1 - 1.5 * b)}$$

Ove LGD = Loss Given Default, PD = Probability of Default, M = scadenza effettiva del credito,  $\Phi$  = funzione di distribuzione cumulativa normale standard,  $\Phi^{-1}$  = funzione di distribuzione cumulativa inversa normale standard, b = aggiustamento in funzione della scadenza =  $(0.11852 - 0.05478 * \ln(PD))^2$ ,  $\rho$  = coefficiente di correlazione (asset correlation)

- 3) Il coefficiente di correlazione è specificato in funzione della PD

$$\rho = 0.12 * \frac{1 - e^{-50 * PD}}{1 - e^{-50}} + 0.24 * \left[ 1 - \frac{1 - e^{-50 * PD}}{1 - e^{-50}} \right]$$

- 4) La PD è il valore maggiore tra 0.03% e la PD annua corrispondente alla classe di rating del debitore; nel caso di inadempienza la PD è posta uguale al 100%. La PD deve riflettere una valutazione di lungo periodo della probabilità di insolvenza media di ciascuna classe di rating (sinteticamente definita PD through-the-cycle)
- 5) La LGD nel metodo base è posta uguale al 45% per i crediti subordinati, non coperti da garanzia reale (75% per i crediti subordinati); nel metodo avanzato la LGD è determinata

<sup>1</sup> Per tutti si veda BCBS, 2005.

dalle valutazioni sviluppate dalla banca ed approvate dalla Autorità di Vigilanza; anche per la LGD va adottata una prospettiva prudenziale di lungo termine (LGD downturn)

- 6) L'aggiustamento per la durata è calibrato sulla scadenza di un anno, infatti ponendo  $M=1$  il termine finale moltiplicativo della funzione regolamentare diventa pari all'unità.

In questa sede vengono ignorate le varie modifiche che si sono susseguite alla versione dell'Accordo del 2004, fino all'attuale versione cosiddetta "Basilea IV".

Ai fini di questo lavoro, trascurando l'aggiustamento per la durata e considerando la LGD deterministica, la Total Loss (TL, perdita al quantile del 99.9%) è definita come:

$$TL = LGD * \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} * \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

$$UL = LGD * \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} * \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}} \right] - PD * LGD$$

mentre la UL è , ove  $PD * LGD$

rappresenta la perdita attesa (EL, expected loss).

Come si vede la UL della formula regolamentare riguarda la valutazione effettuata sull'orizzonte di un anno dalla banca, sia pure incorporando un'ottica pluriennale nella stima della PD e della LGD.

In questa sede per contro si intende attirare l'attenzione sull'importanza di adottare una prospettiva multiperiodale nella valutazione della TL, della EL e quindi della UL. L'obiettivo di questa ricerca consiste quindi nell'esaminare criticamente le conseguenze sulla valutazione del requisito regolamentare derivanti dal cambiamento dell'orizzonte della valutazione: dall'approccio monoperiodale di Basilea ad un approccio che consideri l'intera durata dell'operazione di prestito.

Lo strumento utilizzato per tale finalità fa riferimento al modello di pricing del rischio di credito (Resti & Sironi, 2008). in un'ottica semplificata, allontanandosi però dallo schema adottato nella regulation bancaria: l'UL in questa sede fa riferimento alla volatilità delle perdite su crediti e non all'incremento della perdita attesa dovuta allo stress della probabilità di insolvenza. È questo un passaggio concettuale fondamentale che distingue nettamente l'approccio regolamentare da quello proposto in questo articolo

Come riferimento generale si considera un contratto di finanziamento standard che prevede il pagamento di interessi periodici ed il rimborso del capitale in un'unica soluzione al termine della durata del prestito (analogamente a quanto avviene per un titolo a reddito fisso). Si inizia con un credito della durata di un anno e successivamente se ne estende l'orizzonte agli anni successivi. Infine si traggono indicazioni di caratteri generale.

L'approccio utilizzato riguarda il default-mode model (BCBS, 1999) in cui l'evento creditizio rilevante è solo l'insolvenza definitiva, mentre viene tralasciata la variazione della qualità creditizia (cambiamento della classe di rating), ovvero la modifica del valore economico del credito (che può anche essere migliorativa) derivante dalla variazione del tasso di valutazione congruo per rischio<sup>2</sup>.

## 2. CREDITO A 1 ANNO

Siano  $C$  l'ammontare nominale del credito (EAD, exposure at default),  $P$  la PD,  $L$  la LGD,  $r$  il tasso contrattuale ed  $i$  il tasso risk-free. In un mercato neutrale al rischio  $i$  è il tasso di valutazione per tutte le attività finanziarie; in un'ottica di gestione bancaria il tasso  $i$  viene sostituito dal TIT,

<sup>2</sup> Il tipico modello che tiene conto delle variazioni del valore del credito derivanti da mutamenti della qualità creditizia è CreditMetrics, proposto nel 1997 dalla banca J.P. Morgan, insieme ad altre banche sponsor.

tasso interno di trasferimento dei fondi (ad esempio); R è il recovery rate dell'ammontare vantato dai creditori (capitale ed interessi).

La valutazione del credito monoperiodale non pone particolari problemi. Gli eventi da prendere in considerazione sono solo due: default e non default, le cui probabilità sono rispettivamente P e 1-P. A fine periodo (T1) la situazione del credito è quindi:

**Tabella 1.** Flussi di cassa del credito a 1 anno

Eventi	Prob.	Flussi T1	Valore attuale Flussi	Perdite T1	Valore attuale Perdite
Def	P	$C(1+r)R$	CR	$C(1+r)L$	CL
No Def	1-P	$C(1+r)$	C	0	0
Totale	1				

Il Flusso atteso in T1 è pari a  $C(1+r)RP+C(1+r)(1-P) = C(1+r)(RP+1-P) = C(1+r)(1-P(1-R)) = C(1+r)(1-PL) = C(1+r)(1-EL)$ , ove  $L=1-R$  [cioè  $LGD=1-Recovery Rate$ ] ed EL (expected loss) = perdita attesa unitaria (=PL). Come si vede la perdita attesa complessiva in T1 incorpora la perdita sugli interessi contrattualmente dovuti. Il valore attuale al tasso contrattuale del flusso atteso è pari a  $C(1+r)(1-PL)/(1+r)=C(1-EL)$  e corrisponde al valore atteso del valore attuale dei flussi creditizi:  $CRP+C(1-P) = C(RP+1-P) = C(1-P(1-R)) = C(1-PL) = C(1-EL)$ , in cui la perdita attesa è calcolata al T0 e quindi è riferita al solo capitale prestato.

Nella tabella 1 sono riportate le perdite su crediti nei due possibili eventi, calcolate come differenza tra il flusso contrattualmente previsto e il flusso effettivo condizionato alla realizzazione dell'evento: in caso di default la perdita in T1 è pari a  $C(1+r)-C(1+r)R=C(1+r)(1-R)=C(1+r)L$ ; in caso di non default invece la perdita è ovviamente nulla. Il valore attuale in T0 delle perdite condizionate agli eventi sono rispettivamente  $C(1+r)L/(1+r)=CL$  e 0. La perdita attesa in T1 è quindi pari a  $C(1+r)LP=C(1+r)EL$ , mentre quella in T0, il valore attuale della perdita attesa in T1, è  $C*LP=C*EL$ . Naturalmente la somma del flusso atteso e della perdita attesa corrisponde al flusso contrattuale: in T1 vale  $C(1+r)(1-PL)+C(1+r)PL=C(1+r)$ , mentre in T0 vale  $C(1-EL)+C*EL=C$ .

La volatilità dei flussi creditizi è calcolabile semplicemente:

*Varianza Flussi in T1*

$$\begin{aligned}
 & [C(1+r)R - C(1+r)(1-PL)]^2 P + [C(1+r) - C(1+r)(1-PL)]^2 (1-P) = \\
 & = C^2(1+r)^2(1-L)^2 P + C^2(1+r)^2(1-PL)^2 P - 2C^2(1+r)^2(1-L)(1-PL)P + \\
 & + C^2(1+r)^2(1-P) + C^2(1+r)^2(1-PL)^2(1-P) - 2C^2(1+r)^2(1-PL)(1-P) = \\
 & = C^2(1+r)^2 \left[ \begin{aligned} & (1-L)^2 P + (1-PL)^2 P - 2(1-L)(1-PL)P + (1-P) + (1-PL)^2 - \\ & -(1-PL)^2 P - 2(1-PL)(1-P) \end{aligned} \right] = \\
 & = C^2(1+r)^2 L^2 (P - P^2) = C^2(1+r)^2 L^2 P(1-P)
 \end{aligned}$$

da cui lo scarto quadratico medio è  $sqm(T1) = C(1+r)L\sqrt{P(1-P)}$

ove  $\sqrt{P(1-P)}$  è lo *sqm* della variabile bernoulliana che ammette due valori possibili (0;1) con probabilità dell'evento pari a P.

Il valore attuale in T0 della volatilità dei flussi è  $C(1+r)L\sqrt{P(1-P)} / (1+r) = CL\sqrt{P(1-P)}$ . Questo stesso risultato è ottenibile calcolando la volatilità del valore attuale dei flussi del credito:

*Varianza dei flussi attualizzati in T0*

$$[CR - C(1 - PL)]^2 P + [C - C(1 - PL)]^2 (1 - P)$$

Si osservi che la volatilità dei flussi di cassa del credito coincide con la volatilità delle perdite su crediti sia valutata in T1 che in T0:

*Varianza delle perdite su crediti in T1:*

$$\begin{aligned} & [C(1+r)L - C(1+r)PL]^2 P + [0 - C(1+r)PL]^2 (1-P) = \\ & = C^2(1+r)^2 L^2 P + C^2(1+r)^2 P^3 L^2 - 2C^2(1+r)^2 L^2 P^2 + C^2(1+r)^2 P^2 L^2 - \\ & - C^2(1+r)^2 P^3 L^2 = C^2(1+r)^2 L^2 (P - P^2) = C^2(1+r)^2 L^2 P(1-P) \end{aligned}$$

da cui lo *sqm* delle perdite su crediti in T1 è  $C(1+r)L\sqrt{P(1-P)}$

che attualizzato in T0 diventa  $CL\sqrt{P(1-P)}$ , corrispondente alla radice quadrata della Varianza delle perdite attualizzate in T0:

$$[C * L - C * PL]^2 P + [0 - C * PL]^2 (1 - P)$$

Come si vede la volatilità delle perdite in questo caso, con LGD ed EAD costanti, dipende dalla volatilità della distribuzione bernoulliana delle PD.

La total loss (TL) in questa semplice situazione può essere calcolata utilizzando un capital multiplier, pari ad  $\alpha$ , che colleghi la volatilità della perdita su crediti alla perdita al quantile desiderato (99.9%); tale capital multiplier [ $\alpha = TL/sqmLoss$ ] è ricavabile da un modello di portafoglio, che considera l'intero insieme di crediti della banca.

Nel caso del credito monopériodale si ha quindi:

*Total Loss in T1 (comprensiva dell'effetto degli interessi) =  $\alpha sqmLoss(T1) =$*

$$TL(T1) = \alpha C(1+r)L\sqrt{P(1-P)}$$

*Unexpected Loss in T1 =  $UL(T1) = TL(T1) - EL(T1) = \alpha C(1+r)L\sqrt{P(1-P)} - C(1+r)LP =$*

$$UL(T1) = C(1+r)L \left[ \alpha \sqrt{P(1-P)} - P \right]$$

*Total Loss in T0 (al momento della concessione del credito) =  $\alpha sqmLoss(T0) =$*

$$TL(T0) = \alpha CL\sqrt{P(1-P)}$$

$$UL(T0) = \alpha CL\sqrt{P(1-P)} - CLP = CL \left[ \alpha \sqrt{P(1-P)} - P \right]$$

La UL, che corrisponde al concetto di VaR, è un ingrediente fondamentale nella determinazione del pricing del rischio di credito. Nel modello semplificato adottato in questa sede il tasso contrattuale  $r$  può essere ricavato nel quadro di un mercato di operatori neutrali al rischio<sup>3</sup>; se si ignora per il momento il requisito patrimoniale richiesto dalla regulation bancaria, il tasso contrattuale è il tasso di equilibrio che rende irrilevante all'operatore neutrale al rischio investire in un'attività risk-free o investire in un credito rischioso soggetto a due possibili eventi (default con probabilità  $P$  e non default con probabilità  $1-P$ ); si può quindi scrivere, ponendo per semplicità  $C=1$ :

<sup>3</sup> Operatori neutrali al rischio non significa che non assumono rischi, ma che non pretendono premi per la remunerazione dei rischi che assumono e si limitano a richiedere la semplice copertura delle perdite derivanti da tali rischi.

$$(1+i) = (1+r)RP + (1+r)(1-P)$$

$$\text{da cui } (1+i) = (1+r)(1-P+RP) = (1+r)(1-LP) = (1+r)(1-EL)$$

$$\text{e quindi } r = \frac{i+EL}{1-EL} = \frac{\text{tasso risk-free} + \text{perdita attesa}}{1 - \text{perdita attesa}}$$

Quindi in T1 si possono distinguere:

- a) Flusso certo =  $C(1+i)$
- b) Flusso contrattuale =  $C(1+r)$
- c) Flusso atteso =  $C(1+r)(1-PL)=C(1+r)(1-EL)$

Se si attualizzano il flusso certo al tasso risk-free ed il flusso contrattuale al tasso contrattuale si ottiene ovviamente l'ammontare del credito  $C$ . Se si attualizza il flusso atteso al tasso contrattuale si ottiene l'ammontare del credito al netto della perdita attesa in T0 [ $C(1+r)(1-EL)/(1+r)=C(1-EL)$ ]. Se si attualizza il flusso atteso al tasso risk-free si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{C(1+r)(1-EL)}{1+i}, \text{ da cui sostituendo } r = \frac{i+EL}{1-EL} \text{ si ha } \frac{C \left( 1 + \frac{i+EL}{1-EL} \right) (1-EL)}{1+i} = \\ & = \frac{C \left( \frac{1-EL+i+EL}{1-EL} \right) (1-EL)}{1+i} = C \end{aligned}$$

Quindi il valore attuale del flusso atteso al tasso risk-free corrisponde al valore economico del credito, in un mercato di operatori neutrali al rischio.

Questo stesso schema concettuale è applicabile al caso più complesso in cui si tiene conto del requisito patrimoniale (o requisito regolamentare) ( $K$ ). Quest'ultimo in questa sede è posto uguale

alla perdita inattesa valutata in T0:  $K=UL(T0)= CL \left[ \alpha \sqrt{P(1-P)} - P \right]$ , che è funzione della volatilità delle perdite attualizzate.

Il requisito regolamentare è interpretabile come la quantità di equity che la banca deve idealmente associare al credito concesso  $C$  per assorbire le perdite inattese<sup>4</sup>: dato  $C$ ,  $K$  rappresenta il finanziamento con equity e  $C-K$  la complementare provvista finanziaria a copertura della differenza (con depositi ed altre fonti di finanziamento); il rapporto  $K/C$  identifica la struttura finanziaria idealmente collegata al credito<sup>5</sup>. L'equity  $K$  deve essere remunerato ad un tasso corrispondente al costo del capitale proprio ( $ke$ ) mentre la provvista complementare ( $C-K$ ) viene remunerata al tasso  $i$  (o, meglio, al tasso TIT). Pertanto il tasso target ( $j$ ) che l'operazione di credito deve remunerare è pari a:

$$jC = keK + i(C-K) = iC + (ke-i)K, \text{ da cui } j = i + (ke-i)K/C$$

in cui  $ke-i$  rappresenta lo spread per la remunerazione aggiuntiva richiesta dagli azionisti rispetto al tasso certo (o al tasso di provvista della banca).

Il tasso contrattuale  $r$  diventa quindi pari a:

<sup>4</sup> Le perdite attese sono assorbite nel conto economico sotto forma di accantonamenti al fondo svalutazione crediti.

<sup>5</sup> È inutile rammentare che non si tratta di operazioni di copertura effettiva, con la banca che va a raccogliere nuovo equity per ogni nuovo credito concesso, ma di pura associazione economica delle risorse patrimoniali disponibili.

$$(1 + j) = (1 + r)RP + (1 + r)(1 - P)$$

$$\text{da cui } (1 + j) = (1 + r)(1 - P + RP) = (1 + r)(1 - LP) = (1 + r)(1 - EL)$$

$$\text{e quindi } r = \frac{j + EL}{1 - EL} = \frac{\text{tasso target} + \text{perdita attesa}}{1 - \text{perdita attesa}} = \frac{i + \text{perdita attesa} + \text{spread} * UL(T0) / C}{1 - \text{perdita attesa}}$$

Nel caso del prestito monoperiodale il tasso contrattuale, nell'ambito del modello semplificato adottato in questa sede<sup>6</sup>, non pone particolari problemi in quanto la perdita attesa in T0 e il suo sqm non dipendono dal tasso contrattuale.

Un esempio numerico contribuisce a chiarire lo scema concettuale. La tabella 2 riporta il caso di un credito rischioso di 1000 ad un anno (T1) che ha la probabilità di andare in insolvenza del 2%, nel qual caso la banca recupera il 55% (R) di capitale ed interessi, perdendo il 45% (LGD), come nel metodo base della Regulation di Basilea 2:

**Tabella 2a.** Prestito monoperiodale

C=ammontare prestito =	1000									
i = tasso risk-free	0.05									
r = tasso contrattuale	0.05954	senza Requisito Regolamentare								
PD =	0.02									
RR=recovery rate=	0.55									
LGD=	0.45									
EL = expected loss	0.009									
Flussi di cassa al tasso contrattuale:										
EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1		Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti		Valore Attuale Perdite		
Default	0.02	582.74	11.65		550.00	476.79		450.00		
Non Default	0.98	1059.54	1038.35		1000.00	0.00		0.00		
		Totale		1050.00	E(F(T0))	991.00	EL in T1	9.54	EL in T0	9.00
		sqm Flussi attesi T1		66.75	sqm(F(T0))	63.00	sqm in T1	66.75	sqm in T0	63.00
Flusso contrattuale	1059.54									
Valore attuale dei flussi attesi										
a) al tasso risk-free	1000 = valore nominale del prestito									
b) al tasso contrattuale	991 = valore nominale del prestito - perdita attesa									

Il tasso contrattuale in questo primo esempio non tiene conto del rendimento da assegnare al capitale regolamentare ed è calcolato semplicemente come  $r = (i + EL) / (1 - EL) = (0.05 + 0.009) / (1 - 0.009) = 0.0595$ . Applicando tale tasso si ottengono i flussi di cassa del credito in T1 condizionati alla realizzazione dei due eventi default e non default: 582.74 (=1000\*(1.0595)\*0.55) nel primo caso e 1059.54, pari al flusso contrattuale nel secondo. Il flusso atteso in T1, ponderato per le probabilità dei due eventi, è pari a 1050 e coincide con il flusso certo, calcolato sul tasso risk-free del 5%, coerentemente con il calcolo del tasso contrattuale. La volatilità dei flussi di cassa del credito in T1 (lo scarto quadratico medio, sqm) è pari a 66.75, comprensivo della volatilità sui flussi di capitale e di quella sui flussi di interesse. I valori attuali in T0, al tasso contrattuale, dei flussi di cassa condizionati sono riportati nella colonna 6: il valore atteso dei flussi attualizzati è pari a 991, con una volatilità di 63 (uguale anche al valore attuale della volatilità dei flussi in T1).

<sup>6</sup> In cui si trascurano tra l'altro i costi operativi e gli effetti della tassazione.

Nelle colonne 8 e 10 sono riportate le perdite su credito in T1 e le perdite attualizzate in T0. Le perdite sono calcolate come differenza tra il flusso contrattualmente previsto e quello condizionato all'evento: in caso di default la banca soffre una perdita in T1 di 476.79 (=1059.54-582.74), mentre in caso di non default non vi sono perdite. La perdita attesa in T1 ammonta quindi a 9.54 (comprensiva della perdita attesa su interessi), con una volatilità di 66.75, identica alla volatilità dei flussi di cassa del credito. Il valore attuale delle perdite determina una perdita attesa in T0 pari a 9 (=1000\*0.02\*0.45=EL=C\*P\*LGD), che ovviamente esclude la perdita attesa sugli interessi, con una volatilità di 63, anch'essa coincidente con la volatilità dei flussi di cassa attualizzati.

Il valore attuale del flusso atteso in T1 (1050) al tasso risk-free corrisponde al valore nominale del prestito (1000=1050/1.05), mentre lo stesso flusso attualizzato al tasso contrattuale determina il valore economico del prestito (1050/1.0595=991), pari all'ammontare del prestito al netto della perdita attesa attualizzata (=1000-9), ovvero pari al valore atteso dei flussi di cassa attualizzati.

La seconda parte della tabella 2 aggiorna i calcoli precedenti per tenere conto del requisito patrimoniale regolamentare e della sua remunerazione:

**Tabella 2b.** Prestito monoperiodale con requisito regolamentare

Calcolo del tasso contrattuale che copre anche il costo del capitale di vigilanza (K)							
Capital multiplier ( $\alpha$ )	2	(2 volte la volatilità)					
SQM (T0)	63.00						
TL(T0) Total Loss	126.00						
K (requisito di capitale)=UL	117.00	da finanziare con equity = $\alpha$ *SQM(T0)-EL = TL-EL					
Credito-K	883.00	da finanziare con debito (per semplicità al tasso risk-free)					
Costo equity	0.2						
Spread per premio equity	0.15	equity premium					
Rendimento target (j)	0.06755	tasso target comprensivo della remunerazione di K					
r = tasso contrattuale	0.07725	con requisito regolamentare					
Flussi di cassa al tasso contrattuale:							
EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite	
Default	0.02	592.48	11.85	550.00	484.76	450.00	
Non Default	0.98	1077.25	1055.70	1000.00	0.00	0.00	
		Totale	1067.55	E(F(T0))	991.00	EL in T1	9.70
		sqm Flussi attesi T1	67.87	sqm(F(T0))	63.00	sqm in T1	67.87
						EL in T0	9.00
						sqm in T0	63.00
Flusso contrattuale	1077.25	1077.245					
Valore attuale dei flussi attesi							
a) al tasso target (j)	1000	= valore nominale del prestito			1000.00		
b) al tasso contrattuale	991	= valore nominale del prestito - perdita attesa					

Per ipotesi il capital multiplier è posto uguale a 2 (la Total Loss, la perdita al quantile 99.9%, è 2 volte lo sqm della bernoulliana in T0): tale valore di alfa è stato calibrato sulla base della Total Loss desumibile dalla formula regolamentare alimentata con gli stessi parametri. Usando una PD di 0.02, una LGD di 0.45 ed un coefficiente di correlazione di 0.24 (il valore massimo ammesso dalla Regulation<sup>7</sup>) la formula regolamentare determina un requisito (K) di 111.54 ed una Total

<sup>7</sup> Si è utilizzato il valore massimo della correlazione ammissibile nella Regulation per dare maggiore enfasi ai risultati ottenuti, anche se la formula regolamentare prevede che la correlazione sia funzione della PD.

Loss di 120.54; dividendo quest'ultima per lo  $\text{sqm}(T_0)$  delle perdite su crediti (63) si ricava un capital multiplier di 1.91, arrotondato a 2 nell'esempio della tabella 2. Al tempo  $T_0$  al momento della concessione del prestito la banca stima una volatilità delle perdite attualizzate pari a 63 (il valore attuale della volatilità della perdita nel caso di credito monopériodale dipende solo dalla probabilità di insolvenza e dalla LGD, ovvero sulla base dei dati precedenti:

$C * LGD * \sqrt{P(1-P)} = 1000 * 0.45 * \sqrt{0.02 * 0.98} = 63$ ). La Total Loss è quindi 126, da cui, detraendo la perdita attesa di 9 ( $=C * LGD * P = 1000 * 0.45 * 0.02$ ), si ha la unexpected loss (UL), corrispondente al requisito regolamentare, di 117. Dato il credito di 1000, si può idealmente assumere che 117 sia coperto da equity e per la differenza, 883, da altre forme di provvista. Data tale struttura finanziaria associata all'operazione di credito<sup>8</sup> e tenendo conto del costo del patrimonio azionario della banca del 20% e del costo della provvista a titolo di debito, posta per semplicità uguale al tasso risk-free<sup>9</sup>, di ottiene un tasso target (j) di 0.0675, che corretto per la perdita attesa determina un tasso contrattuale di 0.07725, ora comprensivo della remunerazione del capitale regolamentare con uno spread di 0.15 ( $=0.2-0.05$ ).

Aggiornando i calcoli sui flussi di cassa del credito con il nuovo tasso contrattuale si ottiene un flusso atteso in  $T_1$  di 1067.55, con una volatilità di 67.87, ed una perdita attesa in  $T_1$  di 9.7, con la stessa volatilità. Non mutano invece i valori attualizzati in  $T_0$ . Si ottengono infine le eguaglianze tra il valore nominale del credito ed il valore attuale del flusso atteso attualizzato al tasso target (j) [ $1000 = 1067.55 / 1.06755$ ] e tra il valore economico del credito (991) ed il valore attuale del flusso atteso attualizzato al nuovo tasso contrattuale.

La tabella 3 riporta il conto economico atteso per  $T_1$  dell'operazione di credito, formulato sulla base delle valutazioni elaborate in  $T_0$ :

**Tabella 3.** Conto economico ex-ante  $T_1$

Interessi attivi	77.25
- Costo provvista	50.00
= Margine Interesse	27.25
- Accantonamenti EL	9.70 = Perdita attesa ( $T_1$ )
= Proventi netti creditizi	17.55
- Costo UL	17.55 = spread*K
= Net Profit	0.00
Interessi attivi-EL/C	0.0676 = tasso target (j)
RORAC	0.1500 = spread (ke-i)
RORAROC	0.00

Gli interessi attivi corrispondono al tasso contrattuale, r, moltiplicato per l'esposizione creditizia di 1000; il costo della provvista è dato dal tasso risk-free (in questo caso, o dal TIT in un'altra ipotesi) applicato all'esposizione; la differenza tra gli interessi attivi e il costo della provvista è pari la margine di interesse di 27.25; deducendo l'accantonamento per perdita attesa a carico del conto economico, valutata in  $T_1$  e comprensiva della perdita attesa sugli interessi per 9.7 [si veda anche la tabella 2], si ha un provento netto dall'operazione di finanziamento pari a 17.55, che diviso per l'UL di 117 corrisponde al un tasso RORAC del 15%, pari allo spread applicato al requisito regolamentare. Deducendo ancora il costo della perdita inattesa (equity da allocare idealmente ai rischi inattesi sull'operazione) si ha un profitto netto nullo (ed un RARORAC<sup>10</sup> uguale a zero), che conferma come il tasso regolamentare sia il tasso di equilibrio

<sup>8</sup> Struttura finanziaria indotta dalla regolamentazione bancaria.

<sup>9</sup> Lo schema concettuale non muta se al posto del tasso risk-free si adotta il TIT, tasso interno ombra di trasferimento dei fondi.

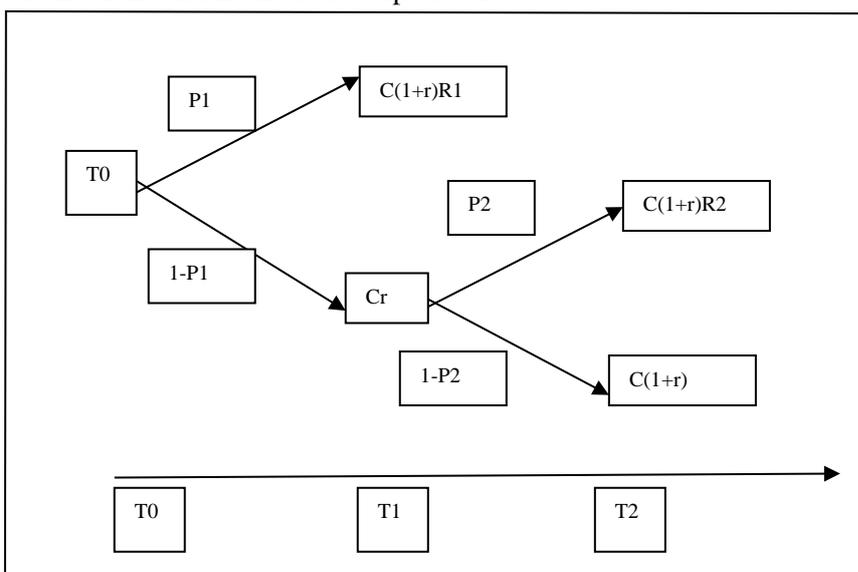
<sup>10</sup> RORAC = return on risk-adjusted capital (K); RARORAC = risk-adjusted return on risk-adjusted capital.

del credito per la copertura dei rischi attesi ed inattesi. Il rapporto tra gli interessi attivi netti (interessi attivi - perdita attesa =  $77.25 - 9.7 = 67.55$ ) e l'esposizione creditizia di 1000 corrisponde al tasso target ( $j$ ) del 6.75%.

### 3. CREDITO A 2 ANNI

L'applicazione dello schema concettuale precedente al caso di credito biperiodale pone problemi aggiuntivi. L'albero degli eventi di un credito a 2 anni, modellato con distribuzione bernoulliana nei singoli anni è il seguente:

**Grafico1.** Eventi in un credito biperiodale



Nel primo anno il credito può andare insoluto con probabilità  $P1$ , nel qual caso la banca recupera una quota pari a  $R1$  di capitale ed interessi: si suppone per semplicità che alla prima insolvenza la banca dichiara risolto il contratto di finanziamento ed il prestito diventi immediatamente esigibile<sup>11</sup>. Se invece il credito non va in default, il flusso contrattuale riguarda il pagamento di interessi ( $C*r$ ); se si è verificato il default nel primo anno, l'albero degli eventi non considera altri rami collegati a quell'evento. Nel caso in cui il credito non sia diventato insolvente nel primo anno, si possono verificare i due eventi possibili nel secondo anno: default con probabilità  $P2$  e non default con probabilità  $1-P2$ . Si definiscono in questa sede  $P1$  e  $P2$  come probabilità marginali di default, mentre le probabilità del secondo anno, condizionate al verificarsi di eventi nel primo anno, rispettivamente  $P2(1-P1)$  e  $(1-P2)(1-P1)$  sono probabilità condizionate, ovvero probabilità di default e non default condizionate all'evento non default nel primo anno. Come si vede l'albero riflette la concatenazione condizionata di due distribuzioni bernoulliane che descrivono gli eventi nei due anni.

Per maggiore generalità i tassi di recupero sono diversi nei due periodi, rispettivamente  $R1$  e  $R2$  e di conseguenza le LGD unitarie sono indicate con  $L1$  e  $L2$ .  $C$  e  $i$  rappresentano l'esposizione creditizia (EAD) ed il tasso risk-free. Riesposto in forma tabellare, l'albero degli eventi del grafico 1 è riportato nella tabella 4 in cui per semplicità è stato posto  $C=1$ :

<sup>11</sup> L'articolo 1186 del Codice Civile prevede che "Quantunque il termine sia stabilito a favore del debitore, il creditore può esigere immediatamente la prestazione se il debitore è divenuto insolvente o ha diminuito, per fatto proprio, le garanzie che aveva date o non ha dato le garanzie che aveva promesso". Peraltro in genere la banca lascia passare un po' di tempo dalla prima insolvenza per vedere se l'impresa riesce a pagare sia pure con qualche ritardo e con l'addebito di interessi di mora; se le insolvenze si accumulano, allora alla banca non resta che dichiarare la risoluzione del contratto per inadempienza e procedere al recupero delle somme pretese.

**Tabella 4a.** Flussi di cassa del credito a 2 anni

Eventi	Probabilità	Flussi in T1	Flussi in T2	Valore attuale dei Flussi T1	Valore attuale dei Flussi T2	Valore attuale totale dei Flussi in T0
Default 1° anno	P1	(1+r)R1	0	R1	0	R1
Default 2° anno	P2(1-P1)	r	(1+r)R2	r/(1+r)	R2/(1+r)	(r+R2)/(1+r)
No Default	(1-P1)(1-P2)	r	1+r	r/(1+r)	1/(1+r)	(1+r)/(1+r)=1
Totale	1					

Come detto sopra si assume che alla prima insolvenza la banca dichiara risolto il contratto di finanziamento e proceda al recupero delle somme dovute.

Il valore atteso dei flussi in T1 è:

$$(1+r)R1P1 + r[P2(1-P1) + (1-P1)(1-P2)] = R1P1 + r(1-L1)P1 + r(1-P1) = R1P1 + r[P1 - L1P1 + 1 - P1] = R1P1 + r(1 - L1P1) = R1P1 + r(1 - EL1)$$

Che è la somma del tasso di recupero del primo anno ponderato per la probabilità di default del primo anno più il tasso di interesse contrattuale al netto della perdita attesa del primo anno.

Il valore atteso dei flussi in T2 è:

$$(1+r)R2P2(1-P1) + (1+r)(1-P1)(1-P2) = (1+r)(1-P1)[(1-L2)P2 + 1 - P2] = (1+r)(1-P1)[1 - L2P2] = (1+r)(1-P1)(1 - EL2)$$

Che corrisponde alla somma di capitale ed interessi del secondo periodo, al netto della perdita attesa di T2, ponderata per la probabilità di sopravvivenza del primo periodo (1-P1).

I valori attuali dei flussi dei due periodi sono riportati nelle colonne 5 e 6 della tabella, mentre nella colonna 7 è indicato il valore attuale in T0 dei flussi di cassa dell'operazione. Il valore atteso del valore attuale dei flussi del primo periodo è:

$$\frac{(1+r)R1P1 + r(1-P1)}{1+r} = R1P1 + \frac{r(1-P1)}{1+r}$$

mentre quello del secondo periodo vale:

$$\frac{(1+r)(1-P1)(1-EL1)}{(1+r)^2} = \frac{(1-P1)(1-EL2)}{1+r}$$

Quindi il valore atteso del valore attuale dei flussi in T0 è pari a:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+r)R1P1 + r(1-P1) + (1-P1)(1-EL2)}{1+r} = \\ & = \frac{R1P1 + rR1P1 - r - rP1 + (1-P1)(1-EL2)}{1+r} = \\ & = \frac{R1P1 + r(1-EL1) + (1-P1)(1-EL2)}{1+r} = 1 - EL1 - \frac{(1-P1)EL2}{1+r} \end{aligned}$$

Le perdite sul credito nei due periodi sono riportate nella tabella 4b:

**Tabella 4b.** Perdite sul credito a 2 anni

Eventi	Probabilità	Perdite in T1	Perdite in T2	Oppure: Perdite	Valore attuale Perdite T1	Valore attuale Perdite T2	Valore attuale Perdite in T0
Default 1° anno	P1	$r-(1+r)R1$	$1+r$	$(1+r)L1$	$[r/(1+r)]-R1$	$1/(1+r)$	L1
Default 2° anno	$P2(1-P1)$	0	$(1+r)-(1+r)R2$	$(1+r)L2$	0	$L2/(1+r)$	$L2/(1+r)$
No Default	$(1-P1)(1-P2)$	0	0	0	0	0	0
Totale	1						

Le perdite su crediti nei singoli periodi sono calcolate come differenza tra i flussi contrattuali ( $r$  in T1 e  $(1+r)$  in T2) ed i flussi condizionati ai default: quindi nel caso di insolvenza in T1 le perdite sono pari a  $r-(1+r)R1$  in T1 e  $(1+r)$  in T2, mentre nel caso di insolvenza in T2 non vi sono perdite in T1 e si ha una perdita in T2 pari a  $(1+r)-(1+r)R2=(1+r)(1-R2)=(1+r)L2$ . Non vi sono perdite ovviamente in caso di non default. Nella colonna 5 è stata indicata una versione alternativa di conteggio delle perdite, aggregando insieme i due periodi: nel caso di default nel primo periodo, se si sommano la perdita in T1 e il valore attuale della perdita in T2 si ha:

$$r - (1+r)R1 + \frac{1+r}{1+r} = (1+r)(1-R1) = (1+r)L1$$
, che ha connotazione temporale T1; nel caso di insolvenza in T2 si ha direttamente la perdita di  $(1+r)L2$  che ha connotazione temporale T2. Nelle colonne 6 e 7 sono riportati i valori attuali delle perdite e nella colonna 8 il valore attuale in T0.

I valori attesi delle perdite in T1 e T2 sono rispettivamente:

$$T1: [r - (1+r)R1]P1$$

$$T2: (1+r)P1 + (1+r)L2P2(1-P1) = (1+r)[P1 + EL2(1-P1)]$$

Il valore atteso del valore attuale in T0 delle perdite è semplicemente la somma delle perdite attese (EL) dei singoli periodi attualizzate, ponderate per le probabilità di insolvenza e di sopravvivenza, ove rilevanti:

$$L1P1 + \frac{L2P2(1-P1)}{1+r} = EL1 + \frac{EL2(1-P1)}{1+r}$$

Questo valore corrisponde ad una perdita su crediti biperiodale, valutata al momento della concessione del prestito.

La somma del valore atteso in T0 dei valori attuali dei flussi del credito e delle perdite corrisponde esattamente all'ammontare del credito:

$$\begin{aligned} & \frac{R1P1 + r(1-EL1) + (1-P1)(1-EL2) + (1+r)EL1 + (1-P1)EL2}{1+r} = \\ & = \frac{R1P1 + r - rEL1 + (1-P1) - (1-P1)EL2 + EL1 + rEL1 + (1-P1)EL2}{1+r} = \\ & = \frac{R1P1 + r + 1 - P1 + EL1}{1+r} = \frac{(1+r) - P1(1-R1) + EL1}{1+r} = \frac{1+r}{1+r} = 1 \end{aligned}$$

La varianza del valore attuale in T0 delle perdite può essere scritta come differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media:

$VAR(VA\text{Perdite}T0)$ :

$$L_1^2 P1 + \frac{L_2^2 P2(1-P1)}{(1+r)^2} - \left[ L1P1 + \frac{L2P2(1-P1)}{1+r} \right]^2, \text{ da moltiplicare per } C^2$$

per avere la varianza in valore

Pertanto la volatilità delle perdite attualizzate è:

$SQM(VA\text{Perdite}T0)$ :

$$\sqrt{L_1^2 P1 + \frac{L_2^2 P2(1-P1)}{(1+r)^2} - \left[ L1P1 + \frac{L2P2(1-P1)}{1+r} \right]^2}, \text{ da moltiplicare per } C$$

per avere la volatilità in valore

Con un procedimento un po' tedioso si può dimostrare che tale espressione corrisponde anche alla varianza del valore attuale dei flussi di cassa del credito<sup>12</sup>: si vedano le successive tabelle con l'esempio numerico.

Si richiama l'attenzione sul fatto che la volatilità delle perdite è una volatilità biperiodale, da cui si ricavano la Total Loss e la UL biperiodali.

Si osservi però che a differenza del caso monopériodale, qui la perdita attesa in T0 e la sua volatilità dipendono esplicitamente dal tasso contrattuale che a sua volta è funzione delle prime; quindi la determinazione del tasso contrattuale deve essere effettuata in modo simultaneo con il calcolo della UL multipériodale che serve a definire il requisito regolamentare: il tasso r, in altri termini, è quel tasso che consente di ottenere l'ammontare nominale del credito come somma dei valori attuali dei flussi di cassa attesi del prestito, calcolati con il tasso contrattuale, attualizzati al tasso target che tiene conto della remunerazione del requisito patrimoniale (UL), che a sua volta dipende dal tasso contrattuale.

In altri termini si deve ottenere il tasso r che risolve il sistema:

$$\begin{cases} \frac{R1P1 + r(1-P1L1)}{1+j} + \frac{(1+r)(1-P1)(1-P2L2)}{(1+j)^2} = 1 \\ j = i + (ke - i)UL(T0) / C \\ UL(T0) = f(r) \end{cases}$$

Per inciso, se ci si limita al calcolo del tasso contrattuale senza tenere conto del costo del requisito regolamentare, il tasso r non richiede il calcolo simultaneo:

dalla equazione di equilibrio

$$\frac{R1P1 + r(1-P1L1)}{1+i} + \frac{(1+r)(1-P1)(1-P2L2)}{(1+i)^2} = 1$$

$$\text{si ha } r = \frac{(1+i)^2 - (1+i)R1P1 - (1-P1)(1-EL2)}{(1+i)(1-EL1) - (1-P1)(1-EL1)}$$

La tabella 5 riporta un esempio numerico di un credito che scade tra due periodi con rimborso in un'unica soluzione alla scadenza ed interessi nel primo periodo.

<sup>12</sup> Si può dimostrare che l'uguaglianza tra la volatilità dei flussi di cassa attualizzati del credito e la volatilità delle perdite attualizzate vale anche nel caso di finanziamenti con piano di ammortamento e rimborso progressivo del capitale prestato.

**Tabella 5a.** Prestito biperiodale

C=ammontare prestito =	1000								
i = tasso risk-free	0.05								
	T1	T2							
PD=	0.02	0.05							
RR=	0.55	0.6							
LGD=	0.45	0.4							
EL=	0.009	0.02							
	Flussi di Cassa								
	Flussi attesi								
	Valori Attuali Flussi di Cassa								
EVENTI	PROB	Flussi T1	Flussi T2	T1	T2	T1	T2	somma T0	
Default 1° anno	0.020	600.247	0.000	12.005	0.000	550.000	0.000	550.000	
Default 2° anno	0.049	91.359	654.815	4.477	32.086	83.711	549.773	633.485	
Non Default	0.931	91.359	1091.359	85.055	1016.055	83.711	916.289	1000.000	
Totale	1.000			Val. Atteso	101.537	1048.141	93.037	880.004	973.041
				sqm	71.244	176.894	65.280	148.517	99.527
				covarianza tra T1 e T2	-	-	-8206.716		
				correlazione	10667.739	-0.846	-0.846		

I flussi di cassa del primo periodo includono il valore di recupero di capitale ed interessi in caso di default (la banca dichiara risolto il contratto) ed il pagamento degli interessi nel caso di non default; nel secondo anno si è nella stessa situazione dell'esempio del credito monoperiodale vista prima, tenuto conto del tasso di sopravvivenza (1-P1) del primo anno. Il valore atteso del valore attuale dei flussi di cassa ponderati per le probabilità dei tre eventi è pari a 973.041, con una differenza rispetto a 1000 (valore nominale del credito) di 26.959, corrispondente al valore attuale della perdita attesa (si veda tabella 5b). La volatilità del valore attuale dei flussi di cassa attesi del credito è 99.527.

La tabella 5b ricostruisce le perdite su crediti nei due periodi ed il loro valore attuale. Come si vede la perdita in T1, calcolata come differenza tra il flusso contrattuale ed il flusso condizionato in caso di default, è negativa (la banca incassa di più rispetto al mero flusso di interessi perché procede al recupero anche del capitale prestato. Se si segue un calcolo alternativo, più compatto (colonne 9 e 10), la perdita con epoca T1 corrisponde alla somma della perdita in T1 e del valore attualizzato in T1 della perdita in T2 dei flussi condizionati al default nel primo periodo (491.112), mentre la perdita nel caso di default nel secondo anno resta 436.544. Il valore attuale in T0 del valore atteso delle perdite coincide ovviamente con 26.959 trovato sopra e la volatilità delle perdite attualizzate (99.527) coincide con la volatilità dei flussi di cassa attualizzati del credito.

**Tabella 5b.** Perdite su Prestito biperiodale

		Perdite su crediti		Valore attuale perdite			Oppure		
EVENTI	PROB	T1	T2	T1	T2	somma	Perdita	ValAttuale	
Default 1° anno	0.020	-	1091.359	-	916.289	450.00	491.112	450.000	
Default 2° anno	0.049	508.888	436.544	466.289	366.515	0	436.544	366.515	
Non Default	0.931	0.000	0.000	0.000	0.000	5	0.000	0.000	
Totale	1.000	EL	-10.178	43.218	-9.326	36.285	26.959	EL	26.959
		sqm	71.244	176.894	65.280	148.517	99.527	sqm	99.527
		covarianza tra T1 e T2	-	-	-				
		correlazione	10667.739	-0.846	8206.716				

Si osservi che, ovviamente, anche la covarianza tra le perdite in T1 e quelle in T2 (-10667.739 e -8206.716 nel caso di perdite attualizzate) coincide con la covarianza tra i flussi di cassa del credito (Tabella 5); lo stesso vale per il coefficiente di correlazione. La volatilità delle perdite attualizzate di 99.527 è quindi anche ottenibile come radice della somma del quadrato di 65.28, del quadrato di 148.517 e di due volte la covarianza ( $2 * (-8206.716)$ ), come nel caso dei flussi di cassa del credito.

La tabella 5c ricostruisce i dati per la determinazione simultanea del tasso contrattuale (0.09136), usato nelle tabelle precedenti, in modo da tenere conto del costo del requisito patrimoniale K. Il tasso di rendimento target (0.07581) sostituisce il tasso risk-free nella attualizzazione dei flussi attesi per ottenere il valore nominale del credito.

**Tabella 5c.** UL biperiodale e tasso contrattuale (calcolo simultaneo)

Calcolo del tasso contrattuale che copre anche il costo del capitale di vigilanza (K)		
Capital multiplier ( $\alpha$ )	2	(2 volte la volatilità)
SQM (T0)	99.527	Volatilità biperiodale delle perdite
TL(T0) Total Loss	199.053	Total Loss biperiodale
K (requisito di capitale)=UL	172.094	da finanziare con equity = $\alpha * SQM(T0) - EL = TL - EL$
Credito-K	827.906	da finanziare con debito (per semplicità al tasso risk-free)
Costo equity	0.20000	
Spread per premio equity	0.15000	equity premium
Rendimento target (j)	0.07581	tasso target comprensivo della remunerazione di K
r = tasso contrattuale	0.09136	(calcolo simultaneo)
Valore attuale in T0 dei flussi attesi		
a) al tasso target	1000.000	= valore nominale del prestito
b) al tasso contrattuale	973.041	= valore nominale del prestito - valore attuale perdite attese

Infine nella Tabella 6 sono riportati i conti economici attesi dei due periodi, formulati in T0 al momento della concessione del credito. L'elemento di maggiore difficoltà di calcolo, che per il resto segue l'impostazione del caso monoperiodale visto in precedenza, riguarda la ripartizione uniforme della perdita attesa su crediti attribuita ai due periodi (15.56); per la ripartizione della EL biperiodale occorre considerare separatamente le probabilità di default dei due periodi: quindi la perdita attualizzata del primo periodo è uguale a 9 (=450\*0.02), la perdita attualizzata del secondo periodo è 18.326 (=366.515\*0.05), per un totale di 27.326; tale cifra può essere ripartita in due valori uguali in base al fattore di annualizzazione di 0.5695  $\left( = r / (1 - (1 + r)^{-2}) \right)$ , ottenendo 15.56. Come si vede il net profit non è esattamente nullo per differenze di arrotondamento.

**Tabella 6.** Conto economico ex-ante

Periodi	T1	T2	
Interessi attivi	91.36	91.36	
- Costo provvista	50.00	50.00	
= Margine Interesse	41.36	41.36	
- Accantonamenti EL	15.56	15.56	= Perdita attesa in T1 e T2
= Proventi netti creditizi	25.80	25.80	
- Costo UL	25.81	25.81	= spread*K
= Net Profit	-0.02	-0.02	
<i>Interessi attivi-EL/C</i>	<i>0.0758</i>	<i>0.0758</i>	= <i>tasso target (j)</i>
<i>RORAC</i>	<i>0.1499</i>	<i>0.1499</i>	= <i>spread (ke-i)</i>
<i>RORAROC</i>	<i>-0.0001</i>	<i>-0.0001</i>	

Una ripartizione diversa, non uniforme, non sarebbe corretta in un conto economico ex-ante multiperiodale, che riflette i risultati attesi dall'operazione per l'intera durata del prestito. Ovviamente alla fine del primo anno la banca aggiorna i calcoli, senza modificare il tasso contrattuale, nell'ipotesi sviluppata in questa sede, rivedendo la P2 e la LGD2, ove necessario, e quindi il conto economico del secondo anno potrà essere diverso da quello stimato in T0.

#### 4. CREDITO A 3 ANNI

L'estensione al caso di un credito a tre anni è banale e viene illustrata come premessa alla generalizzazione a N periodi.

Ponendo per semplicità  $C=1$  e  $P1$ ,  $P2$  e  $P3$ ,  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$  le probabilità marginali di default e le LGD nei tre anni si hanno i seguenti flussi di cassa dell'operazione:

**Tabella 7a.** Flussi di cassa del credito a 3 anni

Eventi	Probabilità	Flussi in T1	Flussi in T2	Flussi in T3	Valore attuale Flussi in T0
Default 1° anno	$P1$	$(1+r)R1$	0	0	$R1$
Default 2° anno	$P2(1-P1)$	$r$	$(1+r)R2$	0	$(r+R2)/(1+r)$
Default 3° anno	$P3(1-P1)(1-P2)$	$r$	$r$	$(1+r)R3$	$[r(1+r)+rR3]/(1+r)^2$
No Default	$(1-P1)(1-P2)(1-P3)$	$r$	$r$	$(1+r)$	1
Totale	1				
Valore atteso		$R1P1+r(1-EL1)$	$(1-P1)[R2P2+r(1-EL2)]$	$(1-P1)(1-P2)[R3P3+1-P3+r(1-EL3)]$	$[(1+r)(R1P1+r(1-EL1))+(1-P1)(R2P2+r(1-EL2))+(1-P1)(1-P2)(1-EL3)]/(1+r)^2$

Anche in questo caso si assume che alla prima insolvenza la banca dichiara risolto il contratto di finanziamento e proceda al recupero delle somme dovute. Come si vede la tabella recepisce tre distribuzioni bernoulliane condizionate in sequenza.

**Tabella 7b.** Perdite sul credito a 3 anni

Eventi	Probabilità	Perdite in T1	Perdite in T2	Perdite in T3	Oppure: Perdite	Valore attuale Perdite in T0
Default 1° anno	$P1$	$r-(1+r)R1$	$r$	$(1+r)$	$(1+r)L1$	$L1$
Default 2° anno	$P2(1-P1)$	0	$r-(1+r)R2$	$(1+r)$	$(1+r)L2$	$L2/(1+r)$
Default 3° anno	$P3(1-P1)(1-P2)$	0	0	$(1+r)-(1+r)R3$	$(1+r)L3$	$L3/(1+r)^2$
No Default	$(1-P1)(1-P2)(1-P3)$	0	0	0	0	0
Totale	1					

Le espressioni analitiche del valore atteso dei valori attuali delle perdite e della volatilità delle perdite e dei flussi di cassa, incluse le tre coppie delle covarianze, sono un po' tediose e quindi si preferisce riprodurre un esempio numerico, costruito sullo stesso schema dei crediti precedenti. Probabilità di insolvenza e LGD sono diverse nei tre periodi.

La Tabella 8 riporta i flussi di cassa del credito, i flussi attesi ed il loro valore attuale in T0. La differenza tra il nominale di 1000 ed il valore attuale atteso del prestito, scontato al tasso contrattuale (946.596) corrisponde alla perdita attesa di 53.404 (Tabella 8b).

**Tabella 8a.** Prestito triperiodale

C=ammontare prestito =		1000										
i = tasso risk-free		0.05										
		T1	T2	T3								
PD=		0.02	0.05	0.07								
RR=		0.55	0.6	0.5								
LGD=		0.45	0.4	0.5								
EL=		0.009	0.02	0.035								
		Flussi di Cassa			Flussi attesi			Valori Attuali Flussi di Cassa				
EVENTI	PROB	Flussi T1	Flussi T2	Flussi T3	T1	T2	T3	T1	T2	T3	somma T0	
Default 1° anno	0.020	607.919	0.000	0.000	12.158	0.000	0.000	550.000	0.000	0.000	550.000	
Default 2° anno	0.049	105.307	663.184	0.000	5.160	32.496	0.000	95.274	542.836	0.000	638.110	
Default 3° anno	0.065	105.307	105.307	552.653	6.863	6.863	36.016	95.274	86.197	409.265	590.735	
Non Default	0.866	105.307	105.307	1105.307	91.178	91.178	957.008	95.274	86.197	818.529	1000.000	
Totale	1.000				Val.Atteso	115.359	130.537	993.024	104.368	106.848	735.379	946.596
					sqm	70.366	121.801	302.646	63.662	99.697	224.123	136.129
					covarianza tra T1 e T2	-1312.186			-971.733			
					covarianza tra T1 e T3	-9982.116			-6687.921			
					covarianza tra T2 e T3	-25053.851			-15186.584			
					correlazione T1 e T2	-0.153			-0.153			
					correlazione T1 e T3	-0.469			-0.469			
					correlazione T2 e T3	-0.680			-0.680			

Nella tabella 8b sono ricostruite le perdite dei singoli periodi, sia nella versione estesa che quella compatta (colonna 11), con i valori attuali, i valori attesi, le volatilità e le covarianze.

**Tabella 8b.** Prestito triperiodale

		Perdite su crediti			Valore attuale perdite				Oppure		
EVENTI	PROB	T1	T2	T3	T1	T2	T3	somma	Perdita	ValAttuale	
Default 1° anno	0.020	-502.612	105.307	1105.307	-454.726	86.197	818.529	450.000	497.388	450.000	
Default 2° anno	0.049	0.000	-557.877	1105.307	0.000	-456.639	818.529	361.890	442.123	361.890	
Default 3° anno	0.065	0.000	0.000	552.6534	0.000	0.000	409.265	409.265	552.653	409.265	
Non Default	0.866	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
Totale	1.000	EL	-10.052	-25.230	112.283	-9.095	-20.651	83.150	53.404	EL	53.404
		sqm	70.366	121.801	302.646	63.662	99.697	224.123	136.129	sqm	136.129
		covarianza tra T1 e T2			-1312.186			-971.733			
		covarianza tra T1 e T3			-9982.116			-6687.921			
		covarianza tra T2 e T3			-			-			
		25053.851			15186.584						
		correlazione T1 e T2			-0.153			-0.153			
		correlazione T1 e T3			-0.469			-0.469			
		correlazione T2 e T3			-0.680			-0.680			

Volatilità e covarianze delle perdite coincidono con quelle dei flussi di cassa del credito condizionati quattro eventi possibili. La volatilità dei valori attuali delle perdite (136.129) è ottenibile anche come radice della somma del quadrato di 63.662, del quadrato di 99.697, del quadrato di 224.123 più la somma di due volte le tre covarianze.

La tabella 8c riporta i dati per il calcolo simultaneo del tasso contrattuale che tiene conto del costo del requisito patrimoniale K.

**Tabella 8c.** UL triperiodale e tasso contrattuale (calcolo simultaneo)

Calcolo del tasso contrattuale che copre anche il costo del capitale di vigilanza (K)			
Capital multiplier ( $\alpha$ )	2	(2 volte la volatilità)	
SQM (T0)	136.129	Volatilità biperiodale delle perdite	
TL(T0) Total Loss	272.258	Total Loss biperiodale	
K (requisito di capitale)=UL	218.853	da finanziare con equity = $\alpha$ *SQM(T0)-EL = TL-EL	
Credito-K	781.147	da finanziare con debito (per semplicità al tasso risk-free)	
Costo equity	0.20000		
Spread per premio equity	0.15000	equity premium	
Rendimento target (j)	0.08283	tasso target comprensivo della remunerazione di K	
r = tasso contrattuale	0.10531	(calcolo simultaneo)	
Valore attuale in T0 dei flussi attesi			
a) al tasso target	1000.000	= valore nominale del prestito	
b) al tasso contrattuale	946.596	= valore nominale del prestito - valore attuale perdite attese	

Infine la tabella 9 espone il conto economico atteso dei tre anni formulato in T0, all'atto della concessione del prestito. Anche in questo caso si è provveduto a ripartire in modo uniforme il valore attuale della perdita attesa, utilizzando le probabilità di default dei singoli anni, senza tenere conto delle probabilità di sopravvivenza.

Il valore attuale della perdita del primo anno è pari a 9 (=450\*0.02), quello della perdita del secondo anno è 18.095 (= 361.89\*0.05), quello della perdita del terzo anno è 28.649 (=409.265\*0.07), con un totale pari a 55.743. Moltiplicando tale cifra per il fattore di annualizzazione di 0.40588  $\left(= r / (1 - (1 + r)^{-3})\right)$  si ha una perdita attesa media di 22.62, inserita nei conti economici come accantonamento.

**Tabella 9.** Conto economico ex-ante

Periodi	T1	T2	T3	
Interessi attivi	105.31	105.31	105.31	
- Costo provvista	50.00	50.00	50.00	
= Margine Interesse	55.31	55.31	55.31	
- Accantonamenti EL	22.62	22.62	22.62	= Perdita attesa in T1, T2 e T3
= Proventi netti creditizi	32.68	32.68	32.68	
- Costo UL	32.83	32.83	32.83	= spread*K
= Net Profit	-0.15	-0.15	-0.15	
Interessi attivi-EL/C	0.0827	0.0827	0.0827	= tasso target (j)
RORAC	0.1493	0.1493	0.1493	= spread (ke-i)
RORAROC	-0.0007	-0.0007	-0.0007	

Anche in questo caso vi sono piccole differenze per arrotondamenti.

## 5. CREDITO A N ANNI

Generalizzando i risultati precedenti, per un credito a N anni si possono scrivere le seguenti relazioni:

*Valore atteso dei flussi di cassa per anno h-esimo ( $h < N$ ), con  $C = 1$ :*

$$EF_h = [R_h P_h + r(1 - EL_h)] \prod_{n=0}^{h-1} (1 - P_n), \text{ ove } P_{h,n} = \text{probabilità di default anno } h \text{ o } n$$

$EL_h =$  perdita attesa anno  $h$ ,  $R_h =$  recovery rate anno  $h$

*Valore atteso dei flussi di cassa dell'anno finale TN :*

$$EF_{TN} = (1 + r)(1 - EL_{TN}) \prod_{n=0}^{TN-1} (1 - P_n)$$

*Valore attuale del valore atteso dei flussi per anno h :*

$$VAEF_h = \frac{[R_h P_h + r(1 - EL_h)] \prod_{n=0}^{h-1} (1 - P_n)}{(1 + r)^h}$$

*Valore attuale del valore atteso dei flussi dell'anno finale TN :*

$$VAEF_{TN} = \frac{(1 + r)(1 - EL_{TN}) \prod_{n=0}^{TN-1} (1 - P_n)}{(1 + r)^{TN}}$$

*Valore attuale in T0 di tutti i flussi attesi del credito :*

$$VAEF(T0) = \sum_{h=1}^{TN-1} \left[ [R_h P_h + r(1 - EL_h)] \prod_{n=0}^{h-1} (1 - P_n) \right] + \frac{(1 + r)(1 - EL_{TN}) \prod_{n=0}^{TN-1} (1 - P_n)}{(1 + r)^{TN}}$$

La volatilità dei flussi attesi attualizzati è pari alla differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media, più facilmente ricavabile a partire dalle perdite (si veda dopo).

Per quanto riguarda le perdite si può scrivere:

Valore attuale delle perdite attese in T0

$$VAEL(T0) = \sum_{h=1}^{TN} \frac{EL_h * PS_{h-1}}{(1+r)^{h-1}}, \text{ ove } PS = \text{probabilità di sopravvivenza cumulata}$$

con  $PS_0 = 1$

$$\text{Quel valore attuale può essere anche indicato come } \sum_{h=1}^{TN} \frac{L_h P_h * PS_{h-1}}{(1+r)^{h-1}},$$

ove  $L_h = LGD$  dell'anno  $h$

Per tanto la varianza delle perdite attese attualizzate è

$$VARL(T0) = \sum_{h=1}^{TN} \frac{L_h^2 (P_h * PS_{h-1})}{[(1+r)^{h-1}]^2} - \left[ \sum_{h=1}^{TN} \frac{L_h P_h * PS_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} \right]^2 \text{ e la volatilità}$$

$$\text{delle perdite è } SQML(T0) = \sqrt{\sum_{h=1}^{TN} \frac{L_h^2 (P_h * PS_{h-1})}{[(1+r)^{h-1}]^2} - \left[ \sum_{h=1}^{TN} \frac{L_h P_h * PS_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} \right]^2}$$

## 6. EL E UL MULTIPERIODALI

La tabella 10 riporta i dati essenziali delle perdite attese ed inattese multiperiodali valutate in T0 insieme ai tassi target ed ai tassi contrattuali di equilibrio per diverse durate alternative del credito da 1 a 10 anni. Per omogeneità dei confronti, i valori indicati sono calcolati con una EAD unitaria ( $C=1$ ) e mantenendo costanti la probabilità di insolvenza al 2%, la LGD al 45%, il coefficiente alfa uguale a 2 e lo spread tra costo dell'equity (20%) ed il tasso risk-free (5%) al 15%.

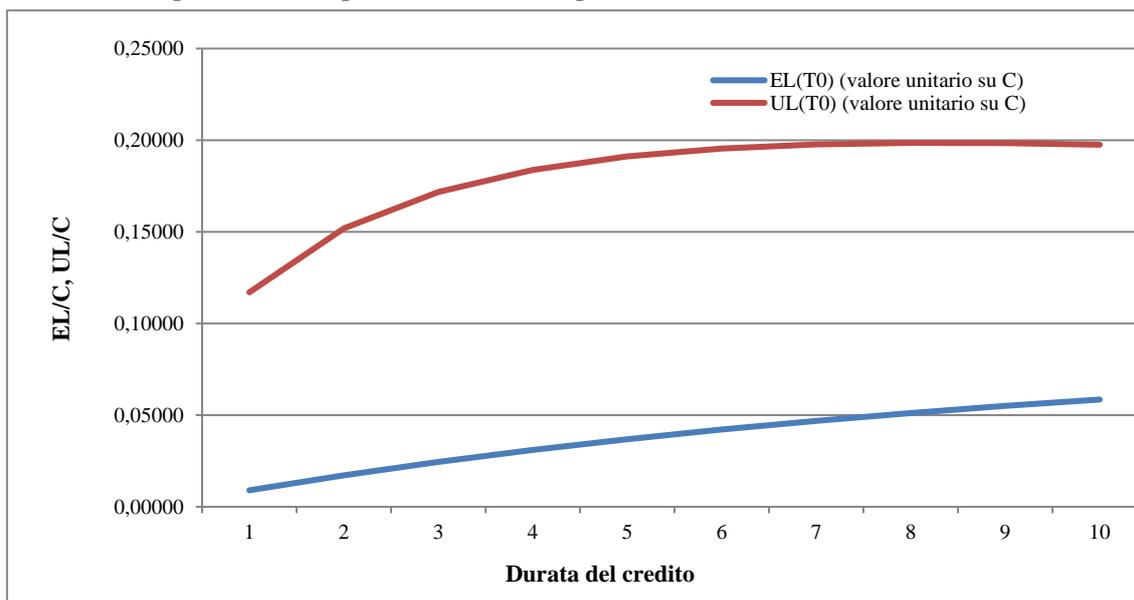
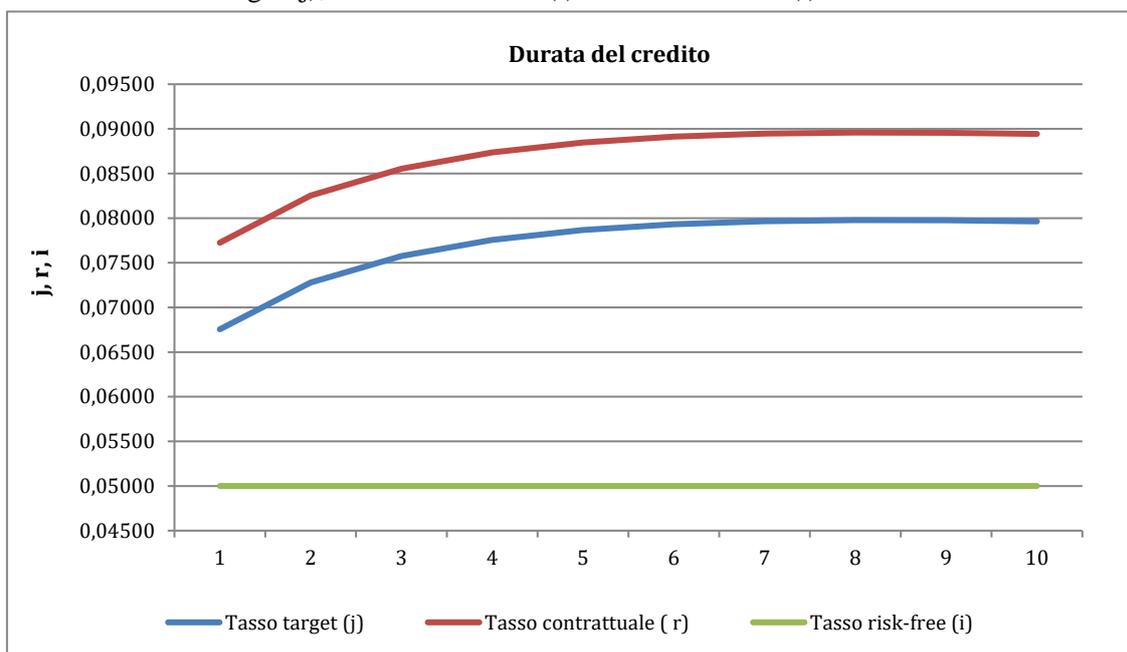
**Tabella 10.** EL e UL multiperiodali, tasso target (J) e tasso contrattuale (r) per crediti di diversa durata

PERIODI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EL(T0) (valore unitario su C)	0.00900	0.01715	0.02446	0.03101	0.03688	0.04215	0.04689	0.05116	0.05502	0.05851
UL(T0) (valore unitario su C)	0.11700	0.15188	0.17171	0.18378	0.19114	0.19545	0.19769	0.19852	0.19837	0.19753
Tasso target (j)	0.06755	0.07278	0.07576	0.07757	0.07867	0.07932	0.07965	0.07978	0.07975	0.07963
Tasso contrattuale ( r)	0.07725	0.08253	0.08553	0.08735	0.08847	0.08912	0.08946	0.08958	0.08956	0.08943
Tasso risk-free (i)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Volatilità perdite (T0)/C	0.06300	0.08452	0.09809	0.10740	0.11401	0.11880	0.12229	0.12484	0.12669	0.12802

Il valore attuale delle perdite attese (EL multiperiodale) passa dal 9 per mille al 5.8%, mentre la volatilità multiperiodale dal 6.3% dell'EAD cresce nei 10 anni a poco più del doppio (12.8%). La perdita inattesa multiperiodale, che nel modello individua il requisito regolamentare, passa dall' 11.7% ad oltre il 19%, con una tendenza asintotica un po' oltre quel livello.

Anche il tasso target, che sostituisce il tasso risk-free nella valutazione dei flussi attesi del credito, ed il tasso contrattuale di equilibrio manifestano una tendenza a stabilizzarsi, dopo una prima fase di crescita, peraltro non particolarmente elevata.

I grafici 2 e 3 illustrano gli andamenti delle variabili principali.

**Grafico 2.** Expected e Unexpected Losses multiperiodali valutate in T0**Grafico 3.** Tasso target (j), tasso contrattuale (r) e tasso risk-free (i)

## 7. PORTAFOGLIO CREDITI E LE UL MULTIPERIODALI

L'approccio visto nelle sezioni precedenti può essere esteso al portafoglio crediti. L'intero portafoglio viene esaminato in T0 come se tutti i crediti dovessero essere decisi ed erogati in quel momento; ciascun credito è caratterizzato dalla propria durata, probabilità di insolvenza e tassi di recupero nei diversi periodi. Il requisito patrimoniale individuale è derivato dal requisito complessivo calcolato sull'intero portafoglio, che è ripartito tra i crediti in base ad un approccio che si richiama alla regola di Eulero e fa riferimento ai beta interni dei singoli crediti. Tali beta

interni sono ricavati sfruttando note proprietà della teoria di portafoglio (nella versione media-varianza).

Rispetto al caso del singolo credito quindi nell'ambito di portafoglio è necessaria la conoscenza della matrice di varianza/covarianza (o dei coefficienti di correlazione) tra i valori economici in TO dei crediti stessi, ovvero tra i valori attualizzati delle perdite su credito.

I tassi contrattuali di equilibrio dei singoli prestiti sono determinati in modo simultaneo con i requisiti patrimoniali, a loro volta funzione delle volatilità dei valori attuali delle perdite, determinate in base ai tassi contrattuali. Pertanto la soluzione simultanea viene calcolata sull'intero portafoglio ottenendo valori di equilibrio per i tassi contrattuali, beta interni, requisito complessivo di portafoglio e requisiti individuali.

L'esempio che segue tratta un portafoglio semplificato con tre prestiti, di cui il primo scade dopo un anno, il secondo dopo due ed il terzo dopo tre anni. Il portafoglio ha una esposizione complessiva di 10.000. La tabella 11 riporta le caratteristiche dei tre crediti:

**Tabella 11a.** Caratteristiche del portafoglio di tre crediti

Tasso risk-free (i)	0.05					
Costo Equity (ke)	0.20					
Spread (ke-i)	0.15					
Credito 1 (C1) monopériodale						
Credito 2 (C2) due períodi						
Credito 3 (C3) tre períodi						
	C1	C2		C3		Totale
Esposizione	1500	3500		5000		10000
	T1	T1	T2	T1	T2	T3
PD	0.02	0.03	0.04	0.05	0.025	0.06
RR	0.4	0.55	0.25	0.45	0.35	0.65
LGD	0.6	0.45	0.75	0.55	0.65	0.35
EL	0.012	0.0135	0.03	0.0275	0.01625	0.021

La tabella 11b riporta i flussi di cassa dei tre crediti, i loro valori attesi, i valori attuali e le volatilità, le perdite, le perdite attese attualizzate e la loro volatilità. I dati sono calcolati utilizzando i tassi contrattuali calcolati con soluzione simultanea, riportati in una tabella successiva.

**Tabella 11b.** Flussi attesi e volatilità

Credito 1:		Flussi				
EVENTI	PROB	T1	Val.attuali	Perdite	VA Perdite	
Default	0.02	650.65	600	975.98	900	
Non Default	0.98	1626.631	1500	0	0	
Totale	1					
Flussi attesi		1607.11	1482.00		18.00	
SQM Flussi		136.64	126.00		126.00	

Credito 2:		Flussi		Flussi		
EVENTI	PROB	T1	T2	Val.attuali	Perdite	VA Perdite
Default 1° anno	0.03	2196.19	0.00	1925.00	1796.88	1575.00
Default 2° anno	0.0388	493.07	998.27	1199.14	2994.81	2300.86
Non Default	0.9312	493.07	3993.07	3500.00	0	0
Totale	1					
Flussi attesi		544.17	3757.08	3363.48		136.52
SQM Flussi		290.53	877.86	511.06		511.06

Credito 3:		Flussi		Flussi		Flussi	
EVENTI	PROB	T1	T2	T3	Val.attuali	Perdite	VA Perdite
Default 1° anno	0.05	2628.37	0.00	0	2250.00	3212.45	2750.00
Default 2° anno	0.02375	840.81	2044.28	0	2217.85	3796.53	2782.15
Default 3° anno	0.055575	840.81	840.81	3796.53	3717.58	2044.28	1282.42
Non Default	0.870675	840.81	840.81	5840.813	5000.00	0.00	0.00
Totale	1						
Flussi attesi		930.19	827.35	5296.44	4725.15		274.85
SQM Flussi		389.59	263.75	1565.86	760.14		760.14

L'ingrediente fondamentale per poter sviluppare i calcoli a livello di portafoglio riguarda la matrice delle connessioni tra i valori in T0 dei crediti, che nello schema seguito in questo lavoro è uguale alla matrice delle correlazioni tra le perdite attualizzate. La tabella 12 riporta la matrice dei coefficienti di correlazione, che in questa sede si assume nota<sup>13</sup>: si tornerà con un successivo lavoro sui complessi problemi da affrontare per la sua determinazione.

**Tabella 12.** Matrice di correlazione tra i valori dei crediti

	C1	C2	C3
C1	1	0.12	0.24
C2	0.12	1	0.18
C3	0.24	0.18	1

Nella tabella successiva (Tabella 13) sono riportati i calcoli necessari per la determinazione del requisito regolamentare complessivo di portafoglio e la sua allocazione tra i tre crediti.

<sup>13</sup> Per semplicità nella tabella sono inseriti il valore minimo, quello massimo e quello medio dei coefficienti di correlazione della regulation di Basilea 2, anche se in quest'ultima le correlazioni si riferiscono alla connessione tra la distance-to-default e la variabile macro e non tra i valori attualizzati dei crediti come nel caso in esame.

**Tabella 13.** Requisiti regolamentari

Esposizione Portafoglio	10000
EL portafoglio	429.37
EL/C portafoglio	0.04294
Varianza perdite portafoglio	1056159.00
SQM perdite di portaf.	1027.70
SQM/C portafoglio	0.10277
covarianza C1&C2	7727.2724
covarianza C1&C3	22986.71
covarianza C2&C3	69926.525
Covar C1&Portafoglio	46589.98
Covar C2&Portafoglio	338839.17
Covar C3&Portafoglio	670729.84
Correl C1&Portafoglio	0.35980
Correl C2&Portafoglio	0.64514
Correl C3&Portafoglio	0.85859
Beta interno C1	0.0441
Beta interno C2	0.3208
Beta interno C3	0.6351
Controllo	1
Capital multiplier ( $\alpha$ )	5.1400
Quantile al 99.9% (TL)	0.5282
UL (VaR 99.9%)	0.4853
VaR 99.9% di portafoglio	4852.99
Requisito Regolam. C1	214.08
Requisito Regolam. C2	1556.95
Requisito Regolam. C3	3081.96
Requisito C1/C1	0.1427
Requisito C2/C2	0.4448
Requisito C3/C3	0.6164
Requisito Portaf/Tot	0.4853

La perdita attesa in T0 di portafoglio (429.37) è la somma delle perdite dei tre crediti (18 per C1, 136.52 per C2 e 275.85 per C3) e corrisponde al 4.29% dell'esposizione complessiva di 10000. La volatilità (sqm) delle perdite di portafoglio (1027.70) è calcolata come radice della somma dei quadrati delle volatilità delle perdite dei singoli crediti e della somma dei doppi prodotti delle covarianze tra le perdite; queste ultime sono desunte dai prodotti dei coefficienti di correlazione per le coppie delle volatilità. I calcoli successivi riguardano le covarianze tra le perdite dei singoli crediti e le perdite complessive di portafoglio e consentono di ottenere i valori dei beta interni (ciascuno dei quali è il rapporto tra la covarianza tra il valore del credito e il totale di portafoglio e la varianza complessiva di portafoglio: ad esempio il beta interno del primo credito (0.0441) è il rapporto tra 46589.98 e 1056159.00).

Per determinare la perdita al quantile, qui posto al 99.9%, si è adottato un capital multiplier di 5.14 ricavato come media di ripetute simulazioni Monte Carlo, ciascuna delle quali composta da 5000 scenari: l'Appendice illustra i calcoli effettuati e la distribuzione delle perdite di questo portafoglio con i tre crediti. Il prodotto del capital multiplier per lo sqm delle perdite di portafoglio determina la Total Loss al quantile del 99.9%, da cui deducendo la perdita attesa si ottiene la UL multiperiodale valutata in T0 (corrispondente al VaR al 99.9%); moltiplicando i beta interni per la UL si sono ricavati i requisiti individuali dei tre crediti.

A partire da quei requisiti si possono calcolare i tassi target con cui attualizzare i flussi di cassa attesi dei crediti, che sono funzione dei tassi contrattuali: imponendo il vincolo che i valori attuali

dei flussi attesi corrispondano agli ammontari nominali dei crediti si ottengono per soluzione simultanea i tassi contrattuali di equilibrio. La tabella 14 riporta i tassi ottenuti:

**Tabella 14.** Tassi target e contrattuali (soluzione simultanea)

	C1	C2	C3	
Tassi target (j)	0.07141	0.11673	0.14246	
Tassi contrattuali (r)	0.08442	0.14088	0.16816	
Valori attuali flussi attesi:				Totale
al tasso target (j)	1500.00	3500.00	5000.00	10000.00
al tasso contrattuale (r)	1482.00	3363.48	4725.15	9570.63

La differenza tra i valori attuali dei flussi attesi ai tassi target (j) ed ai tassi contrattuali (r) è ovviamente uguale alla somma delle perdite attese in T0 sui crediti (10000-9570.63=429.37). I valori elevati dei tassi contrattuali di equilibrio incorporano la grande entità dei requisiti multiperiodali calcolati con questo approccio.

## 8. UL MULTIPERIODALE E L'APPROCCIO REGOLAMENTARE

Come si è visto, in questa sede si è privilegiato un approccio che calcola il requisito regolamentare sull'intera vita dell'operazione creditizia. I valori del requisito sono quindi molto superiori a quelli desumibili dalla formula regolamentare in quanto, a differenza di quest'ultima che considera un orizzonte temporale di un anno, le UL multiperiodali incorporano la volatilità delle perdite sull'intero spettro dei possibili eventi di insolvenza lungo tutta la durata del credito.

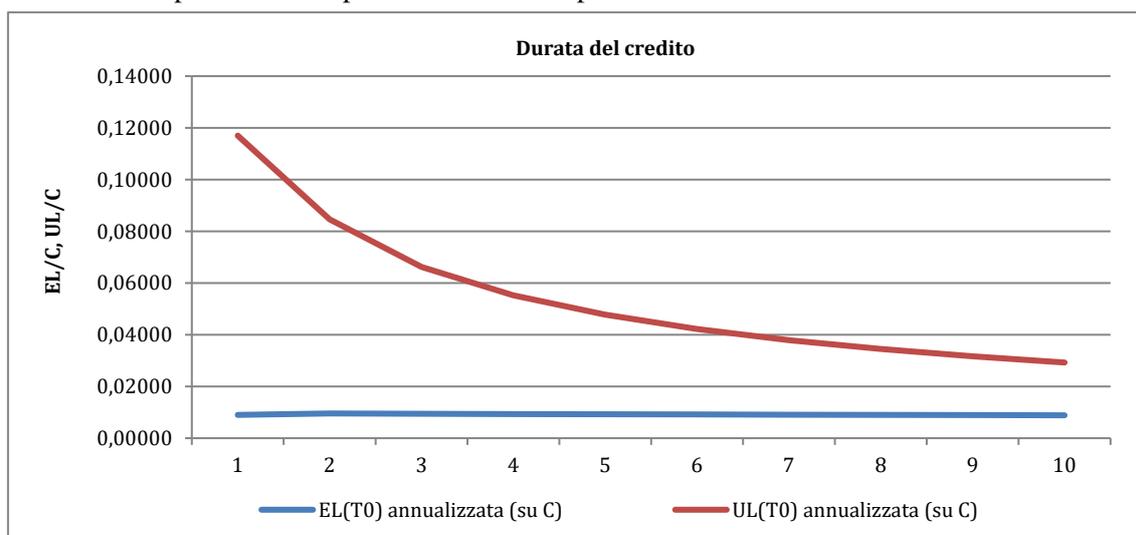
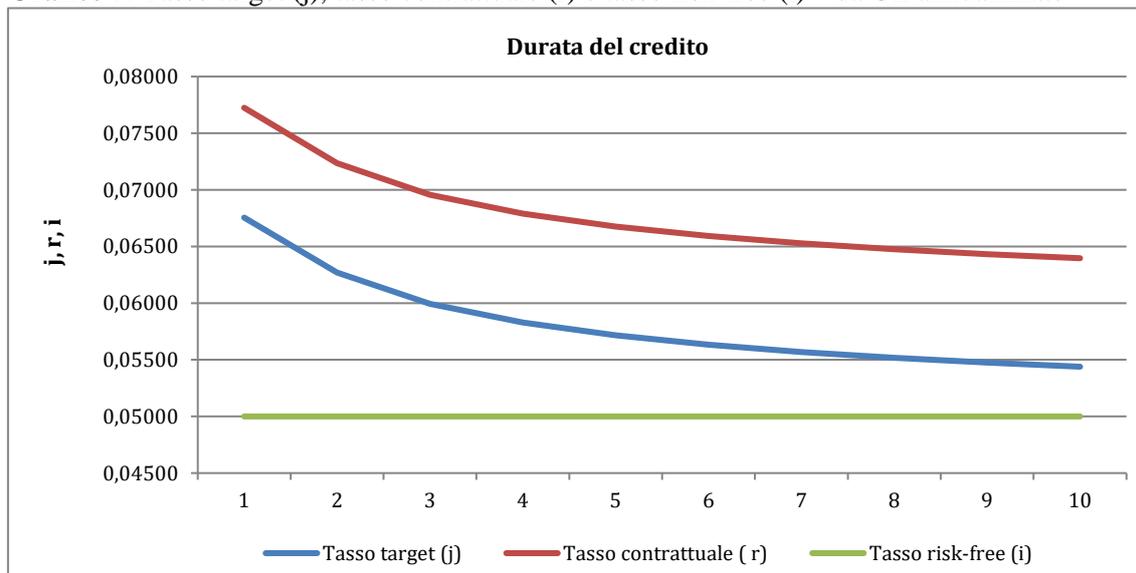
I due approcci sono profondamente diversi: la formula regolamentare stressa la probabilità di default al quantile del 99.9%, senza rendere esplicito il rischio connesso agli eventi creditizi (default [multipli]/non default) che si possono verificare, e per questa via determina il requisito condizionatamente alla PD stressata.

Per impostare un confronto tra le UL multiperiodali e le UL ricalcolate con orizzonte temporale di un anno, si possono annualizzare le UL multiperiodali calcolate in T0 utilizzando il fattore finanziario di annualizzazione, adottato nella costruzione dei conti economici ex-ante. La tabella 15 aggiorna i calcoli della precedente tabella 10 sulla base della annualizzazione dei valori attuali delle perdite attese e della loro volatilità:

**Tabella 15.** EL e UL multiperiodali annualizzate, tasso target (j) e tasso contrattuale (r) per crediti di diversa durata

PERIODI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EL(T0) annualizzata (su C)	0.00900	0.00956	0.00944	0.00934	0.00925	0.00916	0.00908	0.00900	0.00892	0.00885
UL(T0) annualizzata (su C)	0.11700	0.08464	0.06623	0.05525	0.04775	0.04221	0.03792	0.03448	0.03164	0.02926
Tasso target (j)	0.06755	0.06270	0.05994	0.05829	0.05716	0.05633	0.05569	0.05517	0.05475	0.05439
Tasso contrattuale (r)	0.07725	0.07235	0.06956	0.06790	0.06676	0.06593	0.06528	0.06475	0.06433	0.06396
Tasso risk-free (i)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Volatilità perdite annualizzata (su C)	0.06300	0.04710	0.03784	0.03229	0.02850	0.02569	0.02350	0.02174	0.02028	0.01905

I successivi grafici 4 e 5 illustrano l'evoluzione per crediti di diversa durata delle EL e UL annualizzate e dei nuovi tassi target (j) e di quelli contrattuali (r) di equilibrio.

**Grafico 4.** Expected e Unexpected Losses multiperiodali annualizzate**Grafico 5.** Tasso target (j), tasso contrattuale (r) e tasso risk-free (i) – da UL annualizzate

Applicando lo stesso schema al modello di portafoglio e mantenendo il capital multiplier pari a 5.14 si ottengono i seguenti risultati: la tabella 16 riporta i requisiti annualizzati desunti dalla soluzione simultanea di equilibrio sull'intero portafoglio, mentre la tabella 17 aggiorna i tassi target e quelli contrattuali della precedente tabella 15.

**Tabella 16.** Requisiti annualizzati

Requisito annualiz.C1	212.56
Requisito annualiz.C2	926.35
Requisito annualiz.C3	1305.67
Requisito C1/C1	0.1417
Requisito C2/C2	0.2647
Requisito C3/C3	0.2611
Requisito Totale Port.	2444.58
Requisito Portaf/Tot	0.2445

**Tabella 17.** Tassi target e contrattuali con requisiti annualizzati

	C1	C2	C3	
Tassi target (j)	0.07126	0.08970	0.08917	
Tassi contrattuali (r)	0.08427	0.11338	0.11354	
Valori attuali flussi attesi:				Totale
al tasso target (j)	1500.00	3500.00	5000.00	10000.00
al tasso contrattuale (r)	1482.00	3361.27	4714.75	9558.02

## 9. L'APPROCCIO REGOLAMENTARE E LA PD COME VARIABILE CASUALE

Un aspetto cruciale dello schema concettuale adottato nella regulation bancaria non riguarda solo l'orizzonte temporale di un anno ma soprattutto il concetto di rischio di credito sottostante: non la volatilità dei flussi di cassa del credito, ovvero delle perdite descritte dalle distribuzioni bernoulliane concatenate tra loro, ma l'impatto di uno scenario estremo, costruito stressando la probabilità di insolvenza fino a rappresentare una situazione corrispondente al quantile del 99.9% dei casi peggiori.

Per chiarire meglio la differenza con la UL adottata in questo lavoro, può essere utile rivedere alcuni risultati delle pagine precedenti considerando le PD come variabili casuali che possono assumere ex post valori diversi da quelli attesi ex ante. In tale conteso è essenziale non confondere la volatilità della v.c. PD con la volatilità delle perdite descritte dalla distribuzione bernoulliana; la distribuzione delle PD può assumere una qualunque forma.

Rimanendo per semplicità nel caso di un credito ad un periodo come in Basilea II:  
sia  $\tilde{P}$  la probabilità di default come variabile casuale con media  $\bar{P} = E(\tilde{P})$  e

$$\text{varianza } \sigma_{\tilde{P}}^2 = E(\tilde{P} - \bar{P})^2 \text{ e } sqm = \sigma_{\tilde{P}} = \sqrt{E(\tilde{P} - \bar{P})^2}$$

La perdita attesa ex-ante in  $T0$  è al solito  $EL(T0) = L * \bar{P}$ , con  $L = LGD$  det er min istica  
la varianza della perdita attesa è invece:

$$\sigma_{EL(T0)}^2 = E[L\tilde{P} + 0*(1-\tilde{P}) - L\bar{P} - 0*(1-\bar{P})]^2 = L^2 E(\tilde{P} - \bar{P})^2 = L^2 \sigma_{\tilde{P}}^2$$

e quindi la volatilità della  $EL(T0)$  è uguale a  $\sigma_{EL(T0)} = L\sigma_{\tilde{P}}$

Questa volatilità della PD non va confusa con la volatilità delle perdite:

$$\begin{aligned} \text{dalla varianza delle perdite si ha } \sigma_{perdite}^2 &= E[(L - L\tilde{P})^2 \tilde{P} + (0 - L\tilde{P})^2 (1 - \tilde{P})] = \\ &= L^2 \bar{P} + L^2 \bar{P}^3 - 2L^2 \bar{P}^2 + L^2 \bar{P}^2 - L^2 \bar{P}^3 = L^2 \bar{P}(1 - \bar{P}) \end{aligned}$$

da cui si ha la volatilità delle perdite attese in  $T0$ :  $\sigma_{perdite} = L\sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P})}$

L'ultima espressione sotto radice è la ben nota volatilità di una distribuzione bernoulliana: occorre quindi non confondere la volatilità della bernoulliana  $\sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P})}$  con la volatilità  $\sigma_{\tilde{P}}$  della media del parametro della bernoulliana (che individua la probabilità dell'evento). I risultati ripostati sopra si applicano in modo identico alla incertezza sul valore atteso dei flussi di cassa del credito e a quella dei valori attuali dei flussi di cassa del credito.

La regulation di Basilea ha più a che fare con  $\sigma_{\tilde{P}}$  che con  $\sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P})}$ .

Poiché la PD è una v.c. è possibile calcolare la volatilità della volatilità delle perdite.

Le cose si complicano quando si passa dal credito ad un anno a crediti con durata pluriennale: occorre infatti tenere conto della correlazione tra le probabilità di default del primo anno e quelle degli anni successivi. Per illustrare il problema è forse più opportuno far riferimento agli esempi già riportati in precedenza, limitando qui i casi ad uno ed a due periodi.

La tabella 18 riporta il caso del prestito monoperiodale visto in precedenza, la cui probabilità di insolvenza attesa è pari al 2%, ma con tre possibili valori stimati ex ante dalla banca: 1%, 3.5% e 1.5% equiprobabili (per semplicità). Lo sqm delle PD è pari a 0.0108. Lo schema concettuale è il seguente: la banca in T0 stima la PD attesa, come media dei possibili valori che la probabilità di insolvenza può assumere, ponderati in base alla forma della loro distribuzione (uniforme nel caso in esame). Con la PD attesa la banca determina il tasso contrattuale di equilibrio. I dati consentono di quantificare l'incertezza intorno alla perdita attesa in T1 ed in T0, nonché quella riguardante la volatilità delle perdite.

**Tabella 18a.** PD come variabile casuale – Prestito monoperiodale

C=ammontare prestito =		1000			
i = tasso risk-free		0.05			
Valori possibili della PD	v1		v2	v3	tutti equiprobabili
PD =		0.010		0.035	0.015
PD media =		0.02000			
Varianza PD =		0.00012			
SQM PD =		0.01080			
RR=recovery rate=		0.55			
LGD=		0.45			
Valori possibili della EL	w1		w2	w3	
EL = expected loss		0.0045		0.01575	0.00675
EL = expected loss media		0.009			
r = tasso contrattuale		0.07725			con requisito regolamentare

**Tabella 18b.** Flussi di cassa al tasso contrattuale per PD=PD media

EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite	
Default	0.020	592.48	11.85	550.00	484.76	450.00	
Non Default	0.980	1077.25	1055.70	1000.00	0.00	0.00	
		Totale	1067.55	E(F(T0))	991.00	EL in T0	9.00
		sqm Flussi attesi T1	67.87	sqm(F(T0))	63.00	sqm in T0	63.00
r = tasso contrattuale	0.07725	con Requisito Regolamentare					
Flusso contrattuale	1077.25						
Valore attuale dei flussi attesi							
b) al tasso contrattuale	991	= valore nominale del prestito - perdita attesa					

La tabella 18b riporta i flussi di cassa del credito e le perdite in T1 ed i loro valori attuali in T0 calcolati in base al tasso contrattuale (si veda Tabella 2).

Sono però possibili tre diversi risultati ex-post a seconda di quali valori possa assumere la probabilità di insolvenza. La tabella 19 raccoglie i risultati dei flussi del credito monoperiodale condizionati ai tre possibili equiprobabili valori della PD:

**Tabella 19a.** Flussi di cassa al tasso contrattuale per diversi valori della PD

CON PD=v1

EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite			
Default	0.010	592.48	5.92	550.00	484.76	450.00			
Non Default	0.990	1077.25	1066.47	1000.00	0.00	0.00			
		Totale	1072.40	E(F(T0))	995.50	EL in T1	4.85	EL in TO	4.50
		sqm Flussi attesi T1	48.23	sqm(F(T0))	44.77	sqm in T1	48.23	sqm in TO	44.77
r = tasso contrattuale 0.07725 con Requisito Regolamentare									
Valore attuale dei flussi attesi									
b) al tasso contrattuale 995.5 = valore nominale del prestito - perdita attesa									

CON PD=v2

EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite			
Default	0.035	592.48	20.74	550.00	484.76	450.00			
Non Default	0.965	1077.25	1039.54	1000.00	0.00	0.00			
		Totale	1060.28	E(F(T0))	984.25	EL in T1	16.97	EL in TO	15.75
		sqm Flussi attesi T1	89.09	sqm(F(T0))	82.70	sqm in T1	89.09	sqm in TO	82.70
r = tasso contrattuale 0.07725 con Requisito Regolamentare									
Valore attuale dei flussi attesi									
b) al tasso contrattuale 984.25 = valore nominale del prestito - perdita attesa									

CON PD=v3

EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite			
Default	0.015	592.48	8.89	550.00	484.76	450.00			
Non Default	0.985	1077.25	1061.09	1000.00	0.00	0.00			
		Totale	1069.97	E(F(T0))	993.25	EL in T1	7.27	EL in TO	6.75
		sqm Flussi attesi T1	58.92	sqm(F(T0))	54.70	sqm in T1	58.92	sqm in TO	54.70
r = tasso contrattuale 0.07725 con Requisito Regolamentare									
Valore attuale dei flussi attesi									
b) al tasso contrattuale 993.25 = valore nominale del prestito - perdita attesa									

Come si vede a seconda dei valori assunti dalla PD la perdita attesa in T0 può essere uguale a 4.5, 15.75 o 6.75, con le seguenti volatilità delle perdite: 44.77, 82.70 e 54.70.

La tabella 19b sintetizza i risultati principali:

**Tabella 19b.** Perdite attese e volatilità

Media delle perdite attese T1	9.695	= PD <sub>media</sub> *LGD*C*(1+r)
Media delle perdite attese T0	9.000	= PD <sub>media</sub> *LGD*C
SQM perdita attesa in T1	5.236	= LGD*s <sub>qm</sub> (dellaPD)*C*(1+r)
SQM perdita attesa in T0	4.861	= LGD*s <sub>qm</sub> (dellaPD)*C
SQM medio eventi in T1	65.4153	
SQM medio eventi in T0	60.7246	
SQM dello SQM eventi in T1	17.2995	
SQM dello SQM eventi in T0	16.0590	

La media delle perdite attese in T1 e T0 [EL(T1), EL(T0)], pari a 9.965 e 9 rispettivamente, sono anche uguali a quelle calcolate nella tabella 18 sulla base della PD media (2%). Le incertezze intorno alle perdite attese calcolata come sqm delle perdite attese della tabella 19 sono 5.236 in T1 e 4.861 in T0, desumibili direttamente come  $LGD * C * (1+r) * sqm$  della PD, quest'ultimo pari a 0.0108 (Tabella 18), in T1 e  $LGD * C * sqm$  della PD in T0.

Le media degli sqm delle possibili perdite in T1 e T0 sono 65.41 e 60.72 e corrispondono ai valori medi di 48.23, 89.09 e 58.92, ovvero di 44.77, 82.7 e 54.7. Si tratta della volatilità media dei flussi di cassa del credito. Gli ultimi due dati della tabella 19-seguate riguardano lo sqm di questi due sqm dei flussi di cassa in T1 e T0 (volatilità della volatilità).

Il caso del prestito biperiodale si complica significativamente: oltre a considerare la volatilità delle probabilità di insolvenza del primo e del secondo anno, occorre tenere conto della loro connessione<sup>14</sup>. La tabella 20 aggiorna il caso già visto in precedenza del credito biennale (Tabella 5), considerando tre possibili valori equiprobabili della PD del primo anno (1.4%, 3% e 1.6%) e tre per la PD del secondo anno (1.8%, 6.2% e 7%); il tasso regolamentare è quello già calcolato in precedenza per tale prestito.

<sup>14</sup> Se si abbandonasse l'ipotesi semplificatrice di LGD ed EAD deterministiche, la complessità aumenterebbe ulteriormente in quanto si dovrebbero considerare sia le correlazioni seriali di LGD ed EAD, sia quelle tra LGD, EAD e PD nei due periodi.

**Tabella 20a.** Prestito biperiodale

C=ammontare prestito =	1000																																					
i = tasso risk-free	0.05																																					
Valori possibili della PD	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">T1</th> <th colspan="3">T2</th> </tr> <tr> <th>v1,1</th> <th>v1,2</th> <th>v1,3</th> <th>v2,1</th> <th>v2,2</th> <th>v2,3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.014</td> <td>0.03</td> <td>0.016</td> <td>0.018</td> <td>0.062</td> <td>0.07</td> </tr> <tr> <td colspan="3">0.02000</td> <td colspan="3">0.05000</td> </tr> <tr> <td colspan="3">0.00005</td> <td colspan="3">0.00052</td> </tr> <tr> <td colspan="3">0.00712</td> <td colspan="3">0.02286</td> </tr> </tbody> </table>	T1			T2			v1,1	v1,2	v1,3	v2,1	v2,2	v2,3	0.014	0.03	0.016	0.018	0.062	0.07	0.02000			0.05000			0.00005			0.00052			0.00712			0.02286			tutti equiprobabili
T1			T2																																			
v1,1	v1,2	v1,3	v2,1	v2,2	v2,3																																	
0.014	0.03	0.016	0.018	0.062	0.07																																	
0.02000			0.05000																																			
0.00005			0.00052																																			
0.00712			0.02286																																			
PD =																																						
PD media =																																						
Varianza PD =																																						
SQM PD =																																						
RR=	0.55	0.6																																				
LGD=	0.45	0.4																																				
EL con la PD attesa =	0.009	0.02																																				
r = tasso contrattuale	0.09136 con Requisito Regolamentare																																					
Flussi di cassa e perdite in base alle PD attese in T1 e T2																																						
		Flussi di Cassa	Flussi attesi	Valori Attuali Flussi di Cassa	Val. Attuale Perdite																																	
EVENTI	PROB	Flussi T1	Flussi T2	T1 T2 somma T0	Perdita ValAttuale																																	
Default 1° anno	0.020	600.247	0.000	12.005 0.000 550.000 0.000 550.000	491.112 450.000																																	
Default 2° anno	0.049	91.359	654.815	4.477 32.086 83.711 549.773 633.485	436.544 366.515																																	
Non Default	0.931	91.359	1091.359	85.055 1016.055 83.711 916.289 1000.000	0.000 0.000																																	
Totale	1.000			93.037 880.004 973.041	EL 26.959																																	
				sqm 71.244 176.894 65.280 148.517 99.527	sqm 99.527																																	

**Tabella 20b.** Connessione tra PD del primo e del secondo anno

Correlazione tra PDT1 e PDT0	0.6					
Matrice di probabilità congiunte:						
	PDT1-->	v2,1	v2,2	v2,3	Totale PDT0	valori PDT0
PDT0: v1,1		0.319933	0.010000	0.003400	0.333333	0.014
PDT0: v1,2		0.006310	0.100000	0.227023	0.333333	0.030
PDT0: v1,3		0.007090	0.223333	0.102910	0.333333	0.016
Totale PDT0-->		0.333333	0.333333	0.333333	1	
	valori PDT1	0.018	0.062	0.07		

Si assume che la correlazione tra la PD del primo e quella del secondo anno sia del 60%: le probabilità congiunte tra i possibili valori delle PD sono riportati nella tabella 20 (costruita per via numerica). Applicando i diversi valori delle PD in T1 e T2 e tenendo conto delle probabilità congiunte tra di essi si ottengono i risultati sintetizzati nella tabella 21:

**Tabella 21.** Sintesi delle perdite attese in T0

	EL(T0)	SQMFlussi
PD1 = v1,1 & PD2 = v2,1	12.805	71.100
PD1 = v1,1 & PD2 = v2,2	28.706	101.109
PD1 = v1,1 & PD2 = v2,3	31.597	105.396
PD1 = v1,2 & PD2 = v2,1	19.899	89.579
PD1 = v1,2 & PD2 = v2,2	35.542	113.537
PD1 = v1,2 & PD2 = v2,3	38.386	117.144
PD1 = v1,3 & PD2 = v2,1	13.692	73.701
PD1 = v1,3 & PD2 = v2,2	29.560	102.770
PD1 = v1,3 & PD2 = v2,3	32.446	106.959
Media	26.923	97.112
SQM	10.363	18.876

La perdita attesa in T0 dei possibili 9 scenari è pari a 26.92, con una volatilità di 10.36 che dipende dalle volatilità delle due probabilità di insolvenza, concatenate con due bernoulliane (di cui la seconda condizionata alla prima). La volatilità media del valore attuale dei flussi di cassa del credito è di 97.11, la cui volatilità è di 18.87; questi dati si confrontano con 26.959 e 99.527 della Tabella 20.

Per illustrare con maggiore chiarezza gli eventi e le relative probabilità la tabella 22 riporta le PD in T1, le PD condizionate in T2 e le probabilità di sopravvivenza dei 9 possibili scenari:

**Tabella 22.** PD, PD condizionate e probabilità di sopravvivenza

Eventi e probabilità	Def 1°anno	Def 2°anno	No Def	Probabilità
	0.014	0.018	0.968	0.319933
	0.014	0.061	0.925	0.010000
	0.014	0.069	0.917	0.003400
	0.030	0.017	0.953	0.006310
	0.030	0.060	0.910	0.100000
	0.030	0.068	0.902	0.227023
	0.016	0.018	0.966	0.007090
	0.016	0.061	0.923	0.223333
	0.016	0.069	0.915	0.102910
medie	0.02000	0.04890	0.93110	
sqm	0.00712	0.02225	0.02704	
covarianza def1° & def2°	0.00009			
covarianza def1° & no def	-0.00014			
covarianza def2° & no def	-0.00059			
correlazione def1° & def2°	0.58660			
correlazione def1° & no def	-0.74576			
correlazione def2° & no def	-0.97702			

Come si vede la correlazione tra la probabilità di default nel 1° anno e quella di default nel 2° anno, condizionata alla sopravvivenza nel 1° anno è del 58.66%, da non confondersi con il 60% che è la correlazione tra PDT1 e PDT2. Vi è una elevata correlazione negativa tra probabilità di sopravvivenza e probabilità di insolvenza nel 2° anno; tale correlazione resta elevata (-0.9526)

anche nel caso in cui la matrice delle probabilità congiunte dei 9 possibili casi fosse calcolata nell'ipotesi di perfetta indipendenza<sup>15</sup>.

Come si vede nel caso di prestiti multiperiodali è essenziale modellare i collegamenti seriali tra le probabilità di insolvenza. Non è questa la sede per affrontare questa complessa materia, ma si possono evocare alcuni schemi di riferimento, tra cui:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_t &= a + b_1\tilde{P}_{t-1} + b_2\tilde{P}_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \\ \tilde{P}_t &= \hat{P}_{TTC} + b \left[ E(Y_t) - \hat{Y}_{LT} \right] + \varepsilon_t \\ \Phi^{-1}(\tilde{P}_t) &= \sqrt{\rho}E(Y_t) + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_t\end{aligned}$$

La prima espressione collega le PD ad un semplice modello autoregressivo, il cui ordine è definito alla luce delle serie storiche; la seconda espressione fa dipendere la probabilità di insolvenza del periodo t-esimo dalla PD di lungo periodo (PD strutturale) dell'impresa (o della classe di rating a cui l'impresa appartiene) e dalla componente sistematica macroeconomica o/è settoriale, sintetizzata dalla variabile Y: la PD del periodo t-esimo quindi dipende dalla PD di lungo periodo (TTC, through-the-cycle), corretta per l'impatto del ciclo economico atteso in t rispetto al livello della variabile macro di lungo periodo (o medio nel ciclo). La PD TTC può essere il risultato di una valutazione dell'impresa su un orizzonte temporale superiore alla durata dell'operazione di credito. La terza espressione invece utilizza la distance-to-default misurata dal modello probit, come in Merton-Vasicek-KMV<sup>16</sup>, in funzione della componente sistematica e di quella idiosincronica ( $\rho$  rappresenta la correlazione tra la distance-to-default e il fattore macro). La componente residuale o componente idiosincronica, a seconda dei casi, è rappresentata sempre con  $\varepsilon$  nelle tre espressioni.

Per fare un parallelo con lo schema concettuale incorporato nella regulation di Basilea si può calcolare la probabilità di default stressata al 99.9% e valutare il requisito regolamentare sul credito monopériodale visto sopra: a partire dalla PD attesa del 2% ed assumendo un coefficiente di correlazione con la variabile macro del 24%<sup>17</sup> si ottiene una PD stressata del 26.79%:

$$P|_{0.999} = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(0.02) + \sqrt{0.24}\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-0.24}} \right] = 0.26788$$

, pari a circa 13.4 volte la PD del 2%.

La Total Loss secondo Basilea è quindi uguale a  $1000 \cdot 0.26788 \cdot 0.45 = 120.54$ , (TL =  $P|_{0.999} \cdot C \cdot LGD$ ) mentre il requisito regolamentare è pari a  $120.54 \cdot 9 = 111.54$  (UL =  $K = (P|_{0.999} - P) \cdot C \cdot LGD$ ). Si osservi che, come già richiamato a pag. 11, 120.54 ha un ordine di grandezza circa di 2 volte (1.91 volte) lo SQM dei flussi di cassa (ovvero delle perdite) del credito attualizzati in T0.

<sup>15</sup> Queste correlazioni non sono pari a -1 perché  $(1-P1)(1-P2)$  non è uguale a  $1-P2(1-P1)$ .

<sup>16</sup> Si veda Vasicek (2002).

<sup>17</sup> Il valore del 24% è stato usato per estremizzare le differenze tra i diversi risultati. Con una PD del 2% la correlazione ammissibile dalla formula regolamentare è 16.41% invece del 24% e la PD stressata al quantile 99.9% è 19.03% in luogo di 26.79%.

**Tabella 23.** Flussi di cassa al tasso contrattuale con PD=PD stressata al 99/.9%

EVENTI	PROB	T1	Flussi attesi T1	Valore Attuale Flussi	Perdite su crediti	Valore Attuale Perdite
Default	0.2679	592.48	158.71	550.00	484.76	450.00
Non Default	0.7321	1077.25	788.68	1000.00	0.00	0.00
		Totale	947.39	E(F(T0)) 879.46	EL in T1 129.86	EL in T0 120.54
		sqm Flussi attesi T1	214.68	sqm(F(T0)) 199.28	sqm in T1 214.68	sqm in T0 199.28
r = tasso contrattuale	0.07725	con Requisito Regolamentare				
Flusso contrattuale	1077.25					
Valore attuale dei flussi attesi						
b) al tasso contrattuale	879.456	= valore nominale del prestito - perdita attesa				

Come si vede chiaramente dalla Tab.23 lo schema concettuale di Basilea non considera il rischio sui flussi di cassa del credito, ma calcola il requisito regolamentare come aggravio rilevante della perdita attesa. È in sostanza un VaR riferito alla PD intesa come variabile casuale che può assumere in uno scenario particolarmente avverso un valore elevatissimo. In questa sede invece, coerentemente con l'esigenza del pricing del rischio, il VaR al 99.9% è riferito alla volatilità dei flussi di cassa del credito, ovvero delle perdite valutate al tempo T0.

Nel caso di crediti multiperiodali, la regulation si limita alla correzione per la maturity, che è funzione della PD del primo anno: nel caso del prestito a 2 anni, usando i dati degli esempi precedenti, l'incremento del requisito regolamentare è del 13.3% circa<sup>18</sup>.

## 10. CONCLUSIONI

L'obiettivo di questo lavoro è consistito nel riflettere in modo critico sullo schema concettuale incorporato nella regulation bancaria e sintetizzato nella formula regolamentare di Basilea 2 e successive modificazioni.

Dall'analisi svolta emerge chiaramente che la regulation è essenzialmente statica e si basa su operazioni creditizie ad 1 anno nelle quali i calcoli sono particolarmente semplificati; l'estensione a operazioni pluriennali avviene con una correzione forfaitaria calibrata in modo che per i crediti ad un anno essa sia ininfluenza.

Il rischio di credito considerato in Basilea riguarda l'enorme incremento della PD valutata in modo estremamente prudenziale su uno scenario che si colloca al 99.9esimo percentile tra quelli peggiori: gli ingredienti di tale peggioramento, rispetto alla PD attesa, sono il coefficiente di correlazione della distance-to-default con la variabile macro e il livello di quest'ultima, per semplicità modellata con una v.c. normale standard. La perdita inattesa corrisponde quindi alla differenza tra due perdite attese: una valutata al 99.9esimo quantile e l'altra calcolata con la PD attesa.

In questa sede invece il rischio di credito ha a che fare con la volatilità dei flussi di cassa del prestito, che in un modello semplificato con LGD ed EAD costanti corrisponde alla volatilità delle perdite. Per tenere conto della diversa durata delle operazioni di credito la volatilità è determinata in T0, sulla base delle perdite attualizzate. Pur non considerando la volatilità delle LGD e delle EAD, la complessità dei calcoli cresce rapidamente con il progredire della durata dei crediti. Tale modello è coerente con l'esigenza di calcolare il pricing di equilibrio del credito e pertanto appare idoneo a riflettere in modo corretto il rischio di credito.

Tra i vantaggi dell'approccio adottato in questo lavoro vi è il fatto che le PD marginali che lo alimentano vanno stimate con un approccio PIT (point-in-time), anziché TTC (through-the-cycle), ed è quindi, tra l'altro, coerente con le richieste del principio contabile IFRS 9.

Peraltro emergono diversi problemi aperti:

<sup>18</sup> Dalla formula regolamentare si ha  $b=(0.11852-0.05478*\ln(0.02))^2$ , da cui  $(1+(2-2.5)*b)/(1-1.5b)=1.1328$ .

- a) La calibrazione del modello (in sostanza il capital multiplier da usare per passare dalla volatilità delle perdite alla Total Loss) deve essere attentamente valutata per evitare che il passaggio a questo framework generi un aggravio dei requisiti regolamentari per le banche
- b) La correlazione tra i valori attuali dei crediti, ovvero la correlazione tra i valori attuali delle perdite, necessita di serie storiche probabilmente non (ancora) disponibili
- c) La correlazione tra le PD dei diversi anni, nel caso di prestiti pluriennali, è forse di più facile soluzione, ma la sua quantificazione non è stata affrontata in questa sede: si tratta in sostanza di modellare la struttura temporale delle PD marginali, a partire dalle quali ricavare la struttura temporale delle PD condizionate e delle probabilità di sopravvivenza. Le matrici di transizione point-in-time condizionate a fattori macro possono rappresentare una strada per rappresentare l'evoluzione probabilistica delle PD marginali
- d) Tali correlazioni non vanno confuse con quella inserita nella formula regolamentare che riguarda la connessione tra il fattore macro con il valore economico dell'attivo (nel modello di Merton) o con la distance-to-default (nel modello Vasicek-KMV)
- e) Quindi nello schema adombrato in questo lavoro vi è un maggior numero di correlazioni di cui tenere conto (ignorando per il momento le connessioni tra PD, LGD ed EAD)
- f) Infine un problema non esplorato riguarda l'evoluzione temporale del requisito patrimoniale man mano che si procede verso la scadenza del prestito, da calcolare aggiornando le PD, le LGD, l'EAD, i flussi di cassa e la loro volatilità nei periodi successivi a T0. Questo aggiornamento è di particolare rilievo nel caso in cui il prestito sia concesso a tasso variabile.

Il mondo della regulation di Basilea semplifica in misura significativa le problematiche illustrate in questo lavoro, ma in sostanza fa perdere di vista la vera natura pluriennale che riguarda le operazioni di credito.

#### 11. RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS). (1999, aprile). *Credit risk modelling: current practices and applications*. Disponibile da <https://www.bis.org/publ/bcbs49.pdf>
- Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS). (2004, giugno). *Convergenza Internazionale della Misurazione del Capitale e dei Coefficienti Patrimoniali*. Disponibile da <https://www.bis.org/publ/bcbs107ita.pdf>
- Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS). (2005, luglio). *An explanatory note on the Basel II IRB risk weight functions*. Disponibile da <https://www.bis.org/publ/irbriskweight.pdf>
- Morgan, J.P. (1997, aprile). *Introduction to CreditMetrics*, N.Y. Disponibile da <http://homepages.rpi.edu/~guptaa/MGMT4370.09/Data/CreditMetricsIntro.pdf>
- Resti, A. Sironi, A. (2008). *Rischio e valore nelle banche*. Milano: EGEA (2<sup>a</sup> edizione).
- Vasicek. O. (2002, dicembre). Loan Portfolio value. *Risk*. Disponibile da <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.5752&rep=rep1&type=pdf>

## 12. APPENDICE

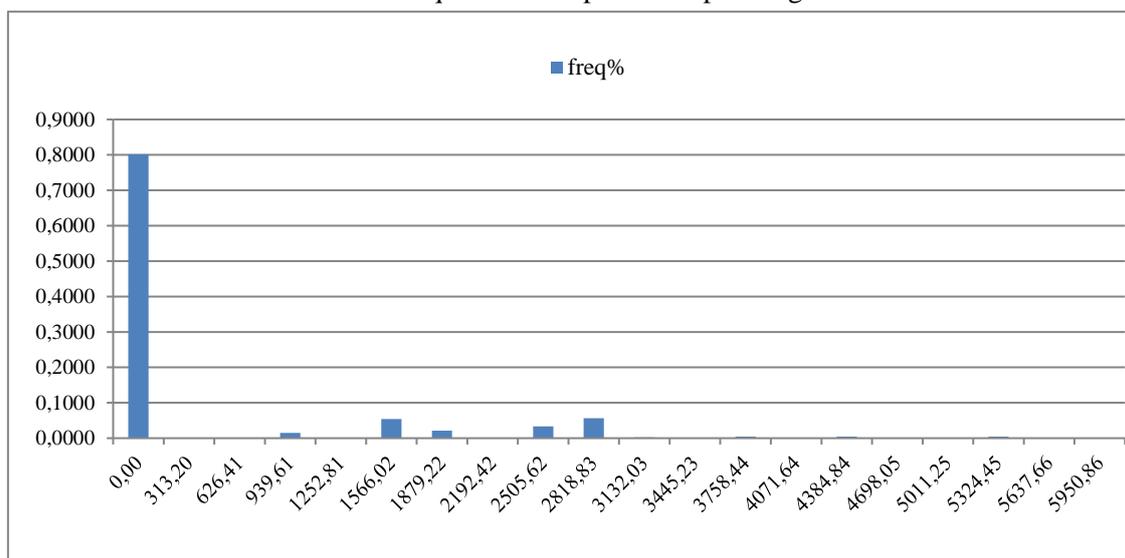
L'esperimento Monte Carlo condotto in questa sede è stato sviluppato su 5000 scenari con estrazioni casuali tratte da una matrice di probabilità congiunte dei tre crediti:

**Tabella A1.** Matrice delle probabilità congiunte delle tre distribuzioni bernoulliane

				C3 def1°	C3 def2°	C3 def3°	C3 no def		
		probC2	probC1	0.05	0.02375	0.055575	0.870675	Totale	
C2 def 1°	C1 def	0.03	0.02	0.004560	0.000160	0.000329	0.000391	0.005440	
C2 def 1°	C1 no def	0.03	0.98	0.001470	0.000698	0.001630	0.020762	0.024560	
C2 def 2°	C1 def	0.0388	0.02	0.000390	0.000018	0.000043	0.000676	0.001127	
C2 def 2°	C1 no def	0.0388	0.98	0.001900	0.008295	0.002100	0.025378	0.037673	
C2 no def	C1 def	0.9312	0.02	0.001020	0.000440	0.010000	0.001973	0.013433	
C2 no def	C1 no def	0.9312	0.98	0.040660	0.014139	0.041473	0.821495	0.917767	
								1.00	

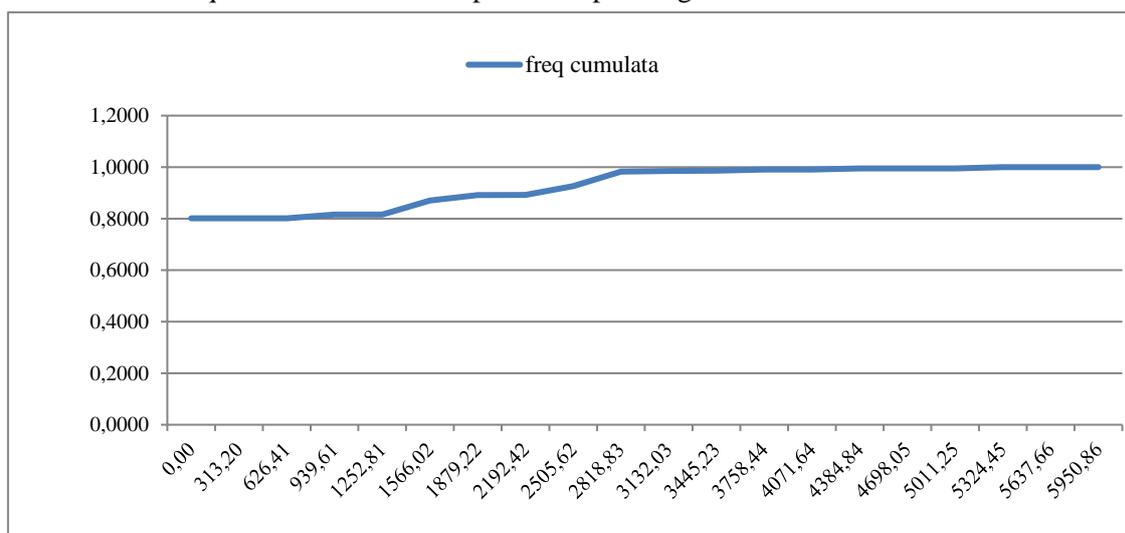
Tali probabilità, ricostruite per via numerica a partire dalle distribuzioni marginali bernoulliane (condizionate) dei possibili eventi dei tre crediti, generano approssimativamente le medie, le volatilità e le correlazioni desiderate delle perdite attualizzate di C1, C2 e C3<sup>19</sup>.

Estraendo in modo indipendente 5000 scenari da quella matrice di probabilità ed abbinando i risultati alle perdite dei tre crediti condizionate ai 24 possibili eventi si ottiene la seguente distribuzione delle perdite di portafoglio (somma delle perdite dei tre crediti – si veda il grafico A1):

**Grafico A1.** Distribuzione della frequenza delle perdite di portafoglio

Il grafico A2 riporta la distribuzione cumulata delle frequenze delle perdite:

<sup>19</sup> C1 def indica l'evento di default del primo credito, C2 def 1° indica il default nel primo anno del credito a due periodi, e così via.

**Grafico A2.** Frequenza cumulata delle perdite di portafoglio

Ripetendo più volte l'intera simulazione di 5000 scenari si è ottenuta una media del rapporto tra la perdita corrispondente al 99.9° quantile e la volatilità delle perdite attualizzate (capital multiplier) di 5.14 volte. Questo valore è usato nei calcoli per la determinazione simultanea dei tassi contrattuali di equilibrio dei tre crediti. Per tenere conto del feed-back tra tassi contrattuali, perdite su crediti e quantile della distribuzione di portafoglio il processo è stato iterato più volte: la necessità delle iterazioni riguarda il fatto che il calcolo del quantile è di tipo non parametrico e non consente una soluzione simultanea in forma chiusa.

Se si fosse adottato un approccio alternativo per evitare il processo iterativo, usando un calcolo in forma chiusa in luogo della simulazione, si sarebbe formulata l'assunzione che la distribuzione delle perdite di portafoglio possa essere approssimata con una distribuzione beta (ad esempio), i cui parametri sono desumibili dalla media e dalla volatilità delle perdite di portafoglio (tabella A2):

**Tabella A2.** Parametri con distribuzione BETA

Alfa (distrib. beta)	0.1241	$EL^2(1-EL)/(UL^2) - EL$
Beta (distrib. beta)	2.7667	$EL(1-EL)^2/(UL^2) + EL - 1$
Quantile al 99.9% (TL)	0.7752	Quantile al 99.9% con inversa della Beta
UL (VaR 99.9%)	0.7323	TL-EL (T0)
Capital multiplier ( $\alpha$ )	7.5432	TL (Quantile al99.9% )/SQM
VaR 99.9% di portafoglio	7322.72	
Requisito Regolam. C1	323.02	
Requisito Regolam. C2	2349.29	
Requisito Regolam. C3	4650.40	

Il parametro alfa (0.1241) corrisponde al calcolo di  $EL^2(1-EL)/(SQM^2)-EL$ , mentre il parametro beta (2.7667) è calcolato come  $EL(1-EL)^2/(SQM^2)+EL-1$ . Calcolando con questi parametri l'inverso della beta al quantile 0.999 si ottiene una stima della Total Loss di 0.7752 (TL unitaria rispetto all'esposizione complessiva di 10000), ed una UL, corrispondente al VaR al 99.9% di 0.7323. Il capital multiplier (TL/sqm) è quindi pari a circa 7.54 volte la volatilità delle perdite complessive, molto maggiore del 5.14 ottenuto per via simulativa. Il requisito

regolamentare sulla base della Beta è quindi uguale a 7322.71, che in base ai beta interni è ripartito in 323.01 al primo credito, 2349.29 al secondo credito e 4650.40 al terzo credito: sono valori estremamente elevati, pur tenendo conto che si tratta di UL multiperiodali che coprono l'intera vita dei crediti. Le simulazioni Monte Carlo descritte sopra mettono però in luce che l'uso della distribuzione Beta conduce ad un grande sovrastima della UL e quindi dei requisiti individuali. L'analisi per comprendere se tale elevata sovrastima dipenda dal ridottissimo numero di crediti dell'esempio riportato in questo lavoro o se tale distribuzione non sia in grado di approssimare l'aggregazione di distribuzioni bernoulliane condizionate ad un numero di eventi variabili verrà affrontata in un successivo lavoro, la cui base di partenza sarà un portafoglio (quasi) perfettamente granulare.

## CNR-IRCrES Working Papers

2020

- N.11/2020 [La ricerca in Nanotecnologie e Nanoscienze in Italia: spesa del settore pubblico e aree tematiche prevalenti](#). Ugo Finardi, Andrea Orazio Spinello.
- N.10/2020 [Persistent fast growth and profitability](#). Lucio Morettini, Bianca Potì, Roberto Gabriele.
- N.9/2020 [Binomio Burnout e Mindfulness nelle organizzazioni. Alcuni studi e scenari di applicazione](#). Oriana Ippoliti, Riccardo Briotti, Bianca Crocamo, Antonio Minopoli.
- N.8/2020 [Innovation and communication of companies on Twitter before and during COVID-19 crisis](#). José N. Franco-Riquelme, Antonio Zinilli, Joaquín B. Ordieres-Meré and Emanuela Reale.
- N. 7/2020 [The proposal of a new hybrid methodology for the impact assessment of energy efficiency interventions. An exploratory study](#). Monica Cariola, Greta Falavigna.
- N. 6/2020 [The technology innovative system of the Silicon Valley](#). Angelo Bonomi.
- N. 5/2020 [Storia dell'industria delle macchine utensili in Piemonte dalle origini alla seconda guerra mondiale](#). Secondo Rolfo.
- N. 4/2020 [Blockchain e Internet of Things per la logistica Un caso di collaborazione tra ricerca e impresa](#). Edoardo Lorenzetti, Lucio Morettini, Franco Mazzenga, Alessandro Vizzarri, Romeo Giuliano, Paolo Peruzzi, Cristiano Di Giovanni.
- N. 3/2020 [L'impatto economico e fiscale di un evento culturale: misure e scala territoriale](#). Giovanna Segre, Andrea Morelli.
- N. 2/2020 [Mapping the tangible and intangible elements of the historical buildings and spaces](#). Edoardo Lorenzetti, Nicola Maiellaro.
- N. 1/2020 [Il lavoro agile negli enti pubblici di ricerca](#). Emanuela Reale, Serena Fabrizio, Andrea Orazio Spinello.

2019

- N. 6/2019 [Women's candidatures in local elections: does the context matter? Empirical evidence from Italian municipalities](#). Igor Benati, Greta Falavigna, Lisa Sella.
- N. 5/2019 [Research activities in Nanotechnologies and Nanosciences: an analysis of Piedmont's nanotech research system](#). Ugo Finardi.
- N. 4/2019 [Xylella fastidiosa: patogenesi, danni economici e lotta al disseccamento rapido dell'olivo](#). Maurizio Conti.
- N. 3/2019 [Flussi di traffico attraverso il tunnel automobilistico del Frejus: un semplice esercizio di forecasting e alcune considerazioni a margine](#). Ugo Finardi.
- N. 2/2019 [The Start-up Venture Capital Innovation System Comparison with industrially financed R&D projects system](#). Angelo Bonomi.
- N. 1/2019 [Complessità delle organizzazioni, complessità della formazione. Report di studio qualitativo ed analisi ermeneutica del Modello TRASE – IRCRES/CNR-IMO](#). Anna Chiara Scardicchio.

2018

- N. 13/2018 [Competenze di sviluppo sistemico evolutivo per la leadership e le organizzazioni orizzontali](#). Erica Rizziato, Erika Nemmo.
- N. 12/2018 [Organizzazioni e leadership orizzontali: il percorso di training sistemico evolutivo \(TRASE\)](#). Erica Rizziato.
- N. 11/2018 [Point-in-time vs.through-the-cycle: filosofie di rating a confronto](#). Franco Varetto.
- N. 10/2018 [Evaluating social innovation: results and emerging issues from a random-trial evaluation of a program for the inclusion of migrant adolescents](#). Valentina Lamonica, Elena Ragazzi, Lisa Sella.
- N. 9/2018 [Promozione dell'Imprenditorialità nelle Nuove Tecnologie. Caso Studio: Associazione "La Storia nel Futuro"](#). Angelo Bonomi.

[Numeri precedenti/Previous issues](#)

## **ABSTRACT**

The banks' capital regulation is essentially static in nature and considers the regulatory requirement as the difference between two expected losses: the first is based on a stressed probability of default and the second is based on the expected probability of default. The framework defined in this paper considers the credit risk as the volatility of the discounted credit losses, that is coherent with the credit risk pricing. Nevertheless, there are some open questions in this framework, as the calibration of the capital requirement and the different kinds of correlations to be estimated.