

# SOLVIBILITÀ VS. LIQUIDITÀ NELLE CRISI D'IMPRESA

Solvability vs. Liquidity in the Corporate Financial Crisis

FRANCO VARETTO

CNR-IRCrES, Consiglio Nazionale delle Ricerche – Istituto di Ricerca sulla Crescita Economica Sostenibile, Via Real Collegio 30, Moncalieri (TO) – Italy

corresponding author: francoww@tin.it

## ABSTRACT

The firm's default can be examined as a solvency event or a shortfall liquidity event. This work deals with two main perspectives followed in the relevant literature: the EBIT-based models and the liquidity-based models. Both are consistent with each other when the over-indebtedness coexists with the shortfall of liquidity. In the econometric section of the paper, the risks of shortage of liquidity compared with the estimated debt reimbursement are measured in the manufacturing industries using the Dati Cumulativi of Mediobanca.

**KEYWORDS:** Credit Risk, Solvency, Liquidity, Cash Flow, Financial Structure

**JEL codes:** C61, G17, G21, G28, G32, G33

## HOW TO CITE THIS ARTICLE

Varetto, F. (2019). Solvibilità vs. liquidità nelle crisi d'impresa. *Quaderni IRCrES*, 4(2), 47-82.  
<http://dx.doi.org/10.23760/2499-6661.2019.10>

- 1 Introduzione
- 2 Il modello di Merton
- 3 Struttura finanziaria EBIT-based
- 4 Cash flow-based models
- 5 Il rischio di illiquidità nei dati Mediobanca
- 6 Conclusioni
- 7 Bibliografia
- 8 Appendice

## 1 INTRODUZIONE

In generale vi sono due approcci fondamentali per lo sviluppo di modelli per la valutazione del rischio di credito: l'approccio strutturale e quello in forma ridotta. L'approccio strutturale si basa sul noto modello di Merton (1974) elaborato a partire dai risultati della teoria delle opzioni finanziarie a cui lo stesso Merton ha dato importanti contributi.

Il secondo approccio modella l'evento default sotto forma di *stopping-time* di un qualche processo stocastico del tipo *hazard-rate*. Il vantaggio dei modelli in forma ridotta rispetto a quelli strutturali risiede nel fatto che le formule di *pricing* possono essere calibrate sugli *spread* creditizi osservati sul mercato. L'approccio in forma ridotta non tenta di spiegare economicamente l'evento default, ma si limita a generarlo statisticamente. In questa sede l'approccio in forma ridotta non viene considerato e tutta l'attenzione viene rivolta all'approccio strutturale.

Il modello di Merton considera una struttura finanziaria estremamente semplificata dell'impresa, composta da un unico tipo di debito: lo *zero-coupon bond* (zcb). Il rischio di insolvenza riguarda l'evento che alla scadenza del debito il valore di mercato delle attività dell'impresa non sia sufficiente a far fronte al valore di rimborso del debito; quest'ultimo, in quanto zcb, include anche gli interessi capitalizzati dal momento dell'emissione. Tra oggi e la data di scadenza del debito non sono previsti pagamenti ai creditori e quindi l'eventuale default può verificarsi in un unico istante di tempo: la scadenza del debito. Si tratta quindi di un concetto di default di tipo patrimoniale: mette a confronto a uno specifico istante di tempo il valore di mercato delle attività dell'impresa con l'ammontare da rimborsare ai creditori finanziari; a quella data l'attivo viene idealmente liquidato e con il ricavato si procede a soddisfare i creditori; se il ricavato è insufficiente gli azionisti in forza del principio di responsabilità limitata abbandonano l'impresa nelle mani dei creditori, che subiscono una perdita corrispondente alla differenza tra quanto spetterebbe a loro di incassare e quanto effettivamente riescono a recuperare dalla vendita delle attività. In questo quadro le azioni sono assimilabili a una *opzione call* di tipo europeo<sup>1</sup> mentre il valore corrente del debito è pari alla differenza tra un debito certo e una *opzione put*<sup>2</sup> venduta dai creditori agli azionisti.

Tale modello ha dato vita a una imponente mole di letteratura scientifica volta sia a produrre stime econometriche dei parametri che pilotano la rischiosità del credito, sia a rimuovere le diverse ipotesi semplificatrici adottate da Merton. Non è questa la sede per ripercorrere, nemmeno a grandi linee, questi sviluppi: basti citare le estensioni di Black e Cox (1976) che hanno introdotto la possibilità che il default avvenga in un qualunque istante di tempo tra oggi e la data di scadenza del debito, e non solo più in quest'ultima, e di Longstaff e Schwartz (1995) che hanno incluso la rischiosità del tasso di interesse accanto a quella del credito, ottenendo soluzioni in forma chiusa della valutazione dei crediti rischiosi<sup>3</sup>. Nei modelli che si ispirano a quelle estensioni il default si verifica quando il valore dell'attivo dell'impresa sfiora una barriera (deterministica o stocastica) di insolvenza, innescando l'evento creditizio; lo sfioramento può avvenire in un qualunque momento. Una ulteriore estensione riguarda l'inserimento di salti nella distribuzione statistica del valore delle attività al posto del normale modello diffusivo (Madan e Unal, 1998; Duffie e Singleton, 1999).

Tra gli obiettivi delle ricerche teoriche ed empiriche sviluppate a partire dal modello iniziale di Merton vi è stato anche quello di rendere le sue previsioni più prossime alla realtà dei mercati finanziari: uno dei problemi del modello è infatti quello di generare livelli teorici di spread sui crediti rischiosi molto inferiori a quelli osservati sul mercato dei *corporate bond*.

---

<sup>1</sup> L'opzione è scritta sul valore dell'attivo con prezzo d'esercizio corrispondente all'ammontare del debito da rimborsare alla scadenza.

<sup>2</sup> Gli azionisti hanno l'opzione di vendere l'attivo dell'impresa ai creditori ad un prezzo pari all'ammontare di rimborso del debito: la *put* viene esercitata dagli azionisti se il valore dell'attivo è inferiore all'ammontare del debito.

<sup>3</sup> Questo aspetto differenzia il contributo di Longstaff e Schwartz da quelli numerosi di altri autori che si sono dedicati all'inserimento di tassi di interesse aleatori nei modelli sul rischio di credito.

Il modello di Merton è stato oggetto di accurata analisi anche da parte di società di consulenza con lo scopo di renderlo concretamente applicabile per la stima quotidiana delle probabilità di default e degli *spread* creditizi; la società di consulenza più importante da questo punto di vista è stata la KMV<sup>4</sup>.

Come si è detto il concetto di default implicito nel modello di Merton, e di tutta la letteratura che si ispira a esso, è di tipo economico-patrimoniale e nasce dal confronto tra due valori economici, quello dell'attivo e quello dell'ammontare del debito. La sostenibilità di quest'ultimo si basa quindi sul fatto che la probabilità che l'evoluzione stocastica dell'attivo lo collochi a un livello inferiore a quello del debito sia molto bassa. Questo concetto di default economico ha a che fare con il concetto di solvibilità: l'impresa resta solvibile, anche se ha problemi di liquidità, fino a quando può far leva sul valore economico delle proprie attività per ottenere fondi dal mercato che le consentano di superare momenti di difficoltà temporanei, anche gravi. La illiquidità in presenza di una sostanziale solvibilità deve essere considerata come un problema risolvibile e superabile con un adeguato sostegno finanziario. Ma se la base economica delle attività è fragile, le crisi temporanee si trasformano rapidamente in crisi irreversibili: la illiquidità in presenza di insolvibilità non può che sfociare in un default definitivo; la continuità della vita dell'azienda è compromessa e l'unico modo per tentare di proseguirla è una dura operazione di ristrutturazione industriale e finanziaria a carico di azionisti e creditori, che riporti in equilibrio il valore economico delle attività e ne ripristini la solvibilità rispetto a un debito abbattuto a livelli sostenibili.

Questo concetto di default si può definire *stock-based-default*, spesso evocato per descrivere la situazione di imprese con patrimonio netto (economico più che contabile) negativo.

La teoria economica peraltro ha diverse definizioni di default e di insolvenza. Anche la semplice violazione di *covenant* è considerato un evento creditizio alla stregua di una insolvenza tecnica. A parte la violazione dei *covenant*, la tipica definizione di insolvenza riguarda il concetto di *financial distress* in base al quale i flussi di cassa sono insufficienti a far fronte alle obbligazioni correnti.

Questo concetto di default è definibile *flow-based-default* e descrive il tipico caso di incapacità dell'impresa di onorare i propri impegni alle diverse scadenze.

L'insolvenza *flow-based* ha a che fare con il confronto tra flussi di cassa disponibili e flussi richiesti per il servizio dei debiti, mentre l'insolvenza *stock-based* riguarda il confronto tra il valore attuale dei flussi di cassa generati dalla gestione e di quello dei flussi riguardanti l'indebitamento. Se l'impresa è insolvente (è in *stock-based default*) ma almeno per il momento ha liquidità sufficiente per onorare gli impegni verso i creditori, questi ultimi non possono attendersi che gli azionisti intervengano a sostenere finanziariamente l'azienda (salvo il caso di società a responsabilità illimitata o di impegni pregressi tra azionisti e creditori).

La distinzione tra modelli strutturali *stock-based* e *flow-based* è discussa in Wruck (1990) e in Kim, Ramaswamy e Sundaresan (1993).

Nell'ambito dell'approccio strutturale sono pochi i modelli sviluppati in ottica *flow-based*. L'obiettivo di questo lavoro è quello di riflettere sulla differenza tra solvibilità e illiquidità, concentrando l'attenzione sui modelli basati sulla dinamica relativa dei flussi di cassa generati dalla gestione rispetto a quelli richiesti per il servizio del debito. Prima verrà sintetizzato il modello di Merton come base di riferimento per lo *stock-based-default*, poi l'attenzione verrà dedicata ai modelli *flow-based*, con alcune considerazioni sulla *cash-flow-based-debt-capacity*.

---

<sup>4</sup> La società KMV venne fondata nel 1989 a San Francisco da S. Kealhofer, J. McQuown e O. Vasicek e ha sviluppato modelli pionieristici nel campo della valutazione del rischio di credito, presi a base anche in CreditMetrics della JPMorgan. Nel 2002 KMV venne acquistata da Moody's per 210 milioni di dollari e ora fa parte del gruppo con il nome di Moody's Analytics.

## 2 IL MODELLO DI MERTON

Nell'approccio strutturale, di cui il modello di Merton rappresenta il punto di partenza di una vastissima letteratura, le passività dell'impresa, debito finanziario ed *equity*, sono considerate titoli contingenti (*contingent claims*) sul valore di mercato delle attività. La sua volatilità rappresenta la fonte fondamentale del rischio di credito.

Sia  $V_0$  il valore corrente delle attività, corrispondente al valore attuale dei flussi di cassa dell'impresa, e  $D$  il valore nominale (di rimborso) del debito che lo finanzia; tale debito ha la forma tecnica di uno *zero coupon bond* (zcb) che prevede il rimborso in un'unica soluzione alla scadenza, comprensivo di capitale e interessi maturati. L'obbligazione contrattuale fondamentale dell'impresa consiste nel rimborsare  $D$  alla sua scadenza al tempo  $T$ . I *covenant* contrattuali garantiscono che i creditori avranno la priorità del rimborso rispetto agli azionisti (*absolute priority*). Gli azionisti godono della clausola di responsabilità limitata e rispondono delle passività aziendali nei limiti del capitale che hanno sottoscritto<sup>5</sup>. Se al tempo  $T$  il valore delle attività,  $V_T$ , è superiore a  $D$  allora i creditori ottengono il pieno rimborso dello zcb; in caso contrario è conveniente per gli azionisti avvalersi della clausola di responsabilità limitata (per non sopportare perdite) e abbandonare l'impresa ai creditori, che la liquideranno e con il ricavato otterranno il rimborso di parte del proprio credito; la differenza rappresenterà la perdita su crediti subita. Pertanto il rimborso dei creditori vale:

$$R_T = \min(V_T; D) = \begin{cases} D & \text{se } V_T > D \\ V_T & \text{se } V_T \leq D \end{cases}$$

Si osservi che con la struttura finanziaria molto semplificata assunta da Merton l'eventuale insolvenza può verificarsi esclusivamente alla scadenza dello zcb e non prima, non essendo previsti pagamenti intermedi tra  $t_0$  e  $T$ . Tale semplificazione è resa necessaria per ricondurre il calcolo del valore corrente del debito nell'ambito delle opzioni di tipo europeo, di cui sono note soluzioni in forma chiusa, che prevedono che l'esercizio dell'opzione possa avvenire solo alla scadenza del titolo (lo zcb in questo caso).

Per calcolare il *pricing* del debito rischioso e della probabilità di default (PD) si assume che l'evoluzione del valore delle attività sia descrivibile con un processo stocastico del tipo di moto

$$\frac{dV_t}{V_t} = d\ln V_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

browniano geometrico:  $\frac{dV_t}{V_t} = d\ln V_t = \mu dt + \sigma dW_t$ , ove  $\mu$  è il tasso di rendimento istantaneo,  $\sigma$  la volatilità del rendimento e  $W$  un processo di Wiener standard con media nulla e varianza pari a  $dt$ . La soluzione di quella equazione differenziale stocastica è ottenibile, com'è noto, applicando

il lemma di Ito, da cui si ottiene  $V_T = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma(W_T - W_0)}$ , che nel discreto diventa

$V_T = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon_T}$ , con  $\varepsilon$  normale standard  $[N(0;1)]$ . La distribuzione del tasso di rendimento delle attività ( $d\ln V$ ) è di tipo normale, mentre la distribuzione del valore delle attività ( $V$ ) è lognormale.

Il *payoff* dei creditori può essere scritto anche come  $D - \max(D - V_T; 0)$ , equivalente all'espressione riportata sopra<sup>6</sup>. Quest'ultima espressione consente di rendere palesi le componenti del valore del credito: il primo termine,  $D$ , può essere considerato come il *payoff* di un credito certo che incassa sempre alla scadenza il suo ammontare contrattuale di rimborso, mentre il secondo termine,  $-\max(D - V_T; 0)$ , non è altro che una posizione corta su una *put* europea

<sup>5</sup> Vale in altri termini il principio di autonomia patrimoniale perfetta dell'impresa, che implica che i creditori si possono soddisfare esclusivamente sui beni della società e non su quelli degli azionisti, salvo l'eventuale rilascio di garanzie da parte di questi ultimi a valere sul proprio patrimonio personale.

<sup>6</sup> Un altro modo di scrivere il *payoff* dei creditori è  $V_T - \max(V_T - D; 0)$  che descrive il debito rischioso come un portafoglio composto da una posizione lunga sulle attività dell'impresa e da una posizione corta su un'opzione europea call; quest'ultima descrive il *payoff* degli azionisti. Infatti la posizione degli azionisti è scrivibile come  $E_T = \max(V_T - D; 0)$  corrispondente ad una opzione europea call lunga scritta sul valore dell'attivo, con scadenza  $T$  e prezzo d'esercizio pari a  $D$ . Le due scomposizioni del *payoff* dei creditori sono equivalenti in base alla parità *put-call*.

scritta sul valore delle attività, con prezzo d'esercizio pari a  $D$  e scadenza in  $T$ . Pertanto, il debito rischioso corrisponde a un portafoglio composto da una posizione lunga su un debito certo e una posizione corta su una *put* venduta dai creditori agli azionisti. Questa scomposizione si rivela utile non solo dal punto di vista interpretativo ma anche ai fini del *pricing* del debito rischioso:

sia  $B_0$  il valore di mercato del debito rischioso

$B_0 =$  valore attuale debito certo  $-$  valore in  $t_0$  della *put* corta  $=$

$$B_0 = De^{-iT} - \left[ De^{-iT} N(-d_2) - V_0 N(-d_1) \right], \text{ ove } i \text{ è il tasso risk-free}$$

$N()$  indica la distribuzione cumulata normale standard,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{D} + \left( i + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$$\text{da cui } B_0 = De^{-iT} [1 - N(-d_2)] + V_0 N(-d_1) = De^{-iT} \left[ N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L} \right]$$

$$\text{ove } L = \text{leverage} = \frac{De^{-iT}}{V_0}$$

Come si vede il valore del debito rischioso è governato da variabili fondamentali:

- Il valore di mercato dell'attivo, funzione delle prospettive future dell'impresa
- Il valore nominale del debito, ovvero il *leverage*, che incorpora il *financial risk*
- La volatilità del valore di mercato delle attività, che è funzione del *business risk*
- La scadenza del debito
- Il tasso di interesse *risk-free* di mercato (il prezzo del tempo)

Da questo schema è facile ricavare la probabilità di insolvenza dell'impresa (PD) sfruttando la normalità della distribuzione di  $W_T$  e di  $\varepsilon$ . A seconda che si faccia riferimento alla valutazione neutrale al rischio o a quella reale si ottengono due PD: la prima è *risk-neutral*, coerente con la valutazione delle opzioni viste sopra, la seconda è la PD reale, calcolata in base al tasso di rendimento effettivo delle attività.

L'evento default si verifica quando il valore in  $T$  dell'attivo è inferiore all'ammontare del debito da rimborsare, quindi la probabilità reale di default è:

$$\begin{aligned} PD_r &= \text{prob}(V_T \leq D), \text{ ovvero in termini log aritmici } \text{prob}(\ln V_T \leq \ln D) \\ PD_r &= \left[ \ln V_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \varepsilon \leq \ln D \right] = \left[ \ln V_0 - \ln D + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \leq -\sigma \sqrt{T} \varepsilon \right] = \\ &= \left[ \varepsilon \leq - \frac{\ln \left( \frac{V_0}{D} \right) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] = N \left[ - \frac{\ln \left( \frac{V_0}{D} \right) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] = PD \text{ reale} \end{aligned}$$

Sostituendo al tasso di rendimento istantaneo reale ( $\mu$ ) dell'attivo il tasso di interesse *risk-free* si ottiene la PD *risk-neutral*<sup>7</sup>:

<sup>7</sup> Se si sostituisce l'ammontare del debito da rimborsare con il *default-point* proposto da KMV l'espressione tra parentesi viene definita *distance-to-default*.

$$PD_n = N \left[ -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] = N(-d_2) = PD \text{ risk - neutral}$$

Pertanto il valore di mercato del debito rischioso può essere riscritto come:

$$B_0 = De^{-iT} - \left[ De^{-iT} - V \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \right] N(-d_2)$$

in cui il primo termine rappresenta il valore attuale di un debito certo che paga  $D$  alla scadenza  $T$ , il termine tra parentesi è la *loss given default* e l'ultimo termine è la *PD risk-neutral*.

### 3 STRUTTURA FINANZIARIA EBIT-BASED

I modelli *EBIT-based* si innestano nella ricerca scientifica riguardante la struttura finanziaria delle imprese considerata nel suo aspetto dinamico<sup>8</sup>. Gli studi iniziali su tale argomento (Fischer, Heinkel e Zechner, 1989; Kane, Marcus e McDonald, 1985) hanno sviluppato modelli a partire dal valore dell'impresa *unlevered* che viene modificato con l'introduzione del debito nel quadro di una politica finanziaria dinamica, che tiene conto degli effetti fiscali, della possibile insolvenza e dei costi di transazione sopportati per l'emissione di strumenti di indebitamento. La variabile di stato in tali modelli è  $V$ , il valore dell'impresa non indebitata (*unlevered equity*):

$$\frac{dV}{V} = \left( r - \frac{\delta}{V} \right) dt + \sigma dz$$

, in cui  $r$  è il tasso di interesse *risk-free* ante tasse,  $\delta/V$  è il tasso di *payout*,  $\sigma$  è la volatilità di  $V$  e  $z$  è un processo Wiener standard definito nel mondo neutrale al rischio. L'approccio dinamico basato sulla modellazione del valore dell'impresa è stato oggetto di diverse critiche (per le quali si rinvia alla letteratura in materia), tra cui una delle più sottili riguarda il dubbio se il valore dell'impresa *unlevered* rimanga un'attività trattata sul mercato dopo che il debito è stato emesso: in quel tipo di modelli infatti esistono contemporaneamente l'*equity unlevered* e l'*equity levered*; inoltre modellando il valore dell'impresa *unlevered* non vi è totale chiarezza su come vengono determinati i valori dei diritti di competenza degli altri pretendenti ai redditi aziendali, specie per quanto riguarda il valore di pertinenza governativa (valore attuale delle tasse).

Per superare i problemi posti dall'approccio dinamico basato sul valore dell'impresa, sono stati introdotti i modelli *EBIT-based*. Il punto di partenza è rappresentato da Goldstein, Ju e Leland (2001), seguito dai lavori di Ammann e Genser (2004a; 2004b; 2005; Genser, 2005; 2006). Anziché modellare il valore dell'impresa *unlevered* in questo approccio la base è l'evoluzione dell'EBIT dell'impresa, ricavando da esso i valori dei diversi diritti che azionisti, creditori e Stato reclamano su di esso. In tal modo si possono ottenere il valore dell'impresa *unlevered* e *levered* senza particolari dubbi interpretativi. L'ipotesi chiave è che l'EBIT generato dall'impresa sia invariante rispetto alle variazioni della struttura finanziaria, in coerenza con il principio di separazione della politica di investimento da quella di finanziamento. Come ben sottolineato da Goldstein, Ju e Leland (GJL), la *EBIT-generating machine* funziona indipendentemente da come il flusso di EBIT è ripartito tra i diversi pretendenti, sotto forma di dividendi, interessi e tasse<sup>9</sup>. L'EBIT è modellato da GJL con un processo stocastico browniano geometrico, mentre, come si vedrà in seguito, Genser ha proposto un processo diverso. L'EBIT nel mondo reale segue un processo:

<sup>8</sup> In precedenza l'analisi della struttura finanziaria si era concentrata sulla scelta statica ottimale della quantità di debito.

<sup>9</sup> In tal modo l'*equity unlevered* e *levered* non esistono mai contemporaneamente, superando il dubbio sottile evocato in precedenza.

$$\frac{d\eta}{\eta} = \mu_{\eta} dt + \sigma dz^R, \text{ ove } \eta = EBIT, \mu_{\eta} = \text{drift del processo nel mondo reale}$$

$\sigma = \text{volatilità}, z^R = \text{processo Wiener standard definito nel mondo reale},$   
 con  $\mu_{\eta}$  e  $\sigma$  costanti.

Sotto certe condizioni di equilibrio generale del sistema il premio per il rischio ( $\theta$ ) e il tasso di interesse *risk-free* ( $r$ ) sono costanti. Il valore dell'impresa (ovvero la somma dei valori dei diritti di tutti i pretendenti all'EBIT) in un mondo neutrale al rischio è quindi definibile come:

$$V = E_0 \int_0^{\infty} \eta_s e^{-rs} ds, \text{ ove } E_0 \text{ indica l'aspettativa nel mondo risk-neutral}$$

Stabilendo il premio per il rischio pari a:

$$\theta = \frac{\mu_{\eta} - \mu}{\sigma}, \text{ ove } \mu = \text{drift del processo nel mondo risk-neutral} = \mu_{\eta} - \theta\sigma, \text{ si può}$$

ridefinire il processo browniano geometrico passando dal mondo reale a quello neutrale al rischio

$$\frac{d\eta}{\eta} = \mu dt + \sigma dz$$

(cambiamento di misura da  $z^R$  a  $z$ ) come  $\frac{d\eta}{\eta} = \mu dt + \sigma dz$ . Poiché  $r$  e  $\mu$  sono costanti anche la dinamica del valore dell'impresa segue lo stesso processo:

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma dz, \text{ e } V = \frac{\eta_0}{r - \mu}, \text{ ove } \eta_0 = EBIT \text{ attuale (al tempo } t_0)$$

La somma della variazione di valore dell'impresa e del flusso istantaneo di EBIT vale<sup>10</sup>

$$\frac{dV + \eta dt}{V} = r dt + \sigma dz$$

GJL hanno definito uno schema di tassazione generale, che conserviamo in questo articolo, in base al quale gli interessi sono tassati con l'aliquota  $\tau_i$ , i dividendi con l'aliquota  $\tau_d$  e i profitti (EBIT - interessi) con l'aliquota  $\tau_c$ , con recupero fiscale delle perdite. L'aliquota fiscale effettiva è  $(1 - \tau_{\text{eff}}) = (1 - \tau_c)(1 - \tau_d)$ . Pertanto se  $V_0$  è il valore dell'impresa al tempo  $t_0$  senza debiti, il valore dell'*equity* degli azionisti ( $E_0$ ) e dei flussi di cassa (tassazione) di pertinenza del Governo ( $G_0$ ) sono rispettivamente:  $E_0 = (1 - \tau_{\text{eff}})V_0$ ;  $G_0 = \tau_{\text{eff}}V_0$ .

Le valutazioni di un'impresa indebitata e del debito emesso possono essere sviluppate a partire da un'impresa identica a quella precedente (*unlevered*) il cui management ha emesso un prestito irredimibile che paga un interesse perpetuo ( $C$ ) fino a quando l'impresa resta solvibile, ovvero fino a quando l'EBIT è sufficiente a pagare gli interessi; oltre quella soglia gli azionisti possono invocare il principio di responsabilità limitata e abbandonare l'impresa nelle mani dei creditori. Il punto di insolvenza può essere modellato come una barriera  $V_B$ , riferita al valore dell'impresa, barriera che in forza del debito perpetuo può essere considerata costante e indipendente dal tempo; se il valore dell'impresa ( $V$ ) raggiunge la soglia  $V_B$  una parte di esso va perduta sotto forma di costi di insolvenza (pari ad  $\alpha V_B$ ).

Com'è noto nell'economia finanziaria qualunque strumento finanziario generico ( $F$ ) deve soddisfare l'equazione differenziale parziale:

$$\mu V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\sigma^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + P = rF$$

, ove  $P$  = flusso infinitesimo pagato; poiché il debito è perpetuo, condizionatamente alla solvibilità dell'impresa, tutti gli strumenti finanziari  $F$  sono indipendenti dal tempo e quindi l'equazione differenziale parziale si riduce a

<sup>10</sup> Da  $\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma dz$  e da  $\frac{\eta dt}{V} = (r - \mu) dt$  si ha  $\frac{dV}{V} + \frac{\eta dt}{V} = \mu dt + \sigma dz + r dt - \mu dt$

$\mu V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\sigma^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + P - rF = 0$  ; trascurando il flusso di cassa P, la soluzione generale dell'equazione  $\mu V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\sigma^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} - rF = 0$  calcolata da GJL è:

$F = A_1 V^{-y} + A_2 V^{-x}$ , con  $A_1$  e  $A_2$  costanti determinate dalle condizioni al contorno e

$$x = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sqrt{\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2r\sigma^2} \right]$$

$$y = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \sqrt{\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2r\sigma^2} \right]$$

Le valutazioni che inglobano i flussi di cassa intermedi (P) sono ottenute dalle soluzioni particolari dell'equazione, a partire dalla soluzione generale:

- Se P riguarda l'intero flusso di cassa distribuito,  $P=V(r-\mu)$ , allora la soluzione particolare è  $F=V$ , cioè il valore complessivo dell'impresa
- Se P riguarda il pagamento degli interessi sul debito perpetuo,  $P=C$ , allora la soluzione particolare è  $F=C/r$

Per analizzare il caso di default è utile definire il prezzo Arrow-Debreu dello stato di insolvenza come  $p_B(V)$ , cioè il prezzo di un titolo che paga 1€ a condizione che il valore dell'impresa V scenda a toccare la barriera di default  $V_B$ . Anche  $p_B(V)$  obbedisce alla soluzione generale indicata sopra, con le condizioni al contorno seguenti: se il valore dell'impresa V aumenta all'infinito  $p_B(V)$  tende a zero perché la probabilità che l'impresa tocchi la soglia di default tende ad annullarsi, mentre se V tende a  $V_B$  allora  $p_B(V)$  tende a 1. Tenendo conto di

$$p_B(V) = \left( \frac{V}{V_B} \right)^{-x}$$

queste due condizioni, la soluzione particolare dell'equazione differenziale vale

. Il valore dell'impresa solvibile, ricavabile anch'esso dalla soluzione generale, è pertanto uguale a  $V_{solv}(V) = V - V_B p_B(V)$ ; il valore del flusso di interessi pagato fino a quando l'impresa resta

$$V_{int} = \frac{C}{r} [1 - p_B(V)]$$

solvibile vale , da cui si possono ricavare le valutazioni dell'*equity* (E), del debito (D) e dei flussi di pertinenza del governo (G), condizionatamente al mantenimento dell'impresa nell'area di solvibilità (che dipende interamente dalle evoluzioni dell'EBIT rispetto al peso degli interessi):

$$E_{solv}(V) = (1 - \tau_{eff})(V_{solv} - V_{int})$$

$$D_{solv}(V) = (1 - \tau_i)V_{int}$$

$$G_{solv}(V) = \tau_{eff}(V_{solv} - V_{int}) + \tau_i V_{int}$$

$$E_{solv} + D_{solv} + G_{solv} = V_{solv}$$

ove  $V_{solv}$  può essere anche scritto come valore atteso nel mondo neutrale al rischio

dei payoff generati dalla EBIT-machine:  $V_{solv} = E_0 \left[ \int_0^{T_b} \eta_s e^{-rs} ds \right]$ , in cui la  $T_b$  indica

la variabile casuale che identifica il momento dell'insolvenza

In caso di default il valore dell'impresa è  $V_B \cdot p_B(V)$ ; tenendo conto dei costi di bancarotta (BC) e del fatto che l'*equity* ha un valore nullo, le valutazioni delle singole parti dei flussi di cassa condizionati all'evento insolvenza sono:

$$E_{def}(V) = 0$$

$$D_{def}(V) = (1 - \alpha)(1 - \tau_{eff})V_{def}(V)$$

$$G_{def}(V) = (1 - \alpha)\tau_{eff}V_{def}(V)$$

$$BC_{def}(V) = \alpha V_{def}(V)$$

$$E_{def} + D_{def} + G_{def} + BC_{def} = V_{def}, \text{ ove } V_{def} \text{ può essere indicato come } E_0 \left[ \int_{T_b}^{\infty} \eta_s e^{-rs} ds \right]$$

Trascurando ulteriori dettagli del modello di GJL, giova sottolineare il contributo innovativo proposto da Ammann e Genser (AG), soprattutto da quest'ultimo. La base concettuale di AG è quella del modello di GJL, ma gli autori se ne distanziano a partire dal diverso processo stocastico usato per descrivere la dinamica dell'EBIT. GJL, come si è visto, hanno modellato l'EBIT con un processo browniano geometrico, dello stesso tipo di quelli usati nell'economia finanziaria per i prezzi delle attività sottostanti ai titoli derivati. Tale processo ha però il limite di non ammettere valori negativi; diversamente non sarebbe infatti possibile calcolarne il logaritmo per ricavarne il tasso di rendimento nel continuo, sotto forma di log-rendimenti. Ma è invece esperienza comune che le imprese, specie nei momenti di difficoltà, possono incorrere in perdite operative che generano EBIT negativi. Per consentire all'EBIT di assumere qualunque valore, anche quelli negativi, AG hanno fatto ricorso al moto browniano aritmetico (in luogo di quello geometrico), con alcune notevoli semplificazioni nei calcoli, pur mantenendo la chiarezza dello schema di GJL.

L'EBIT nel mondo reale, secondo AG, segue il processo  $d\eta = \mu_\eta dt + \sigma dz^R$ , ove i simboli assumono il significato già precisato in precedenza. La generazione di EBIT non dipende da come esso viene ripartito tra i diversi pretendenti. Come di consueto sia data una misura di probabilità martingala equivalente che consente di calcolare i valori delle attività nel mondo neutrale al rischio e di determinare il premio per il rischio ( $\theta$ ), che si assume costante in condizioni di equilibrio generale. AG definiscono  $V$  come il valore di ricevere in perpetuo l'EBIT; nel caso in cui  $V$  fosse trattato sul mercato si avrebbe  $\theta = (\mu - r)/\sigma$ ; se invece  $V$  non è trattato sul mercato occorre stimare il premio per il rischio necessario a effettuare il cambiamento di misura per passare dal mondo reale a quello neutrale al rischio<sup>11</sup> (che consente di attualizzare tutti i diversi flussi con un unico tasso, quello *risk-free*). Applicando il lemma di Ito si ha:

<sup>11</sup> Data una misura di martingala adattata al mondo neutrale al rischio, la possibilità di valutare con essa strumenti finanziari non quotati dipende dall'esistenza di un titolo quotato con dinamica identica al processo stocastico dell'attività da valutare.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} d\eta^2$$

In base al principio di non arbitraggio il rendimento di  $V$  deve essere uguale al tasso risk-free, cioè  $\eta dt + dV = rVdt$  da cui, dato il processo stocastico di  $\eta$ , si ricava

$$V = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta_0}{r}, \text{ ove } \eta_0 \text{ è l'EBIT iniziale in } t_0 \text{ e } \mu = \mu_\eta - \theta\sigma$$

$$\text{ovvero } V = \frac{\mu_\eta - \theta\sigma}{r^2} + \frac{\eta_0}{r}$$

da cui si può ottenere il processo di  $\eta$  nel mondo neutrale al rischio:

$$d\eta = (\mu_\eta - \theta\sigma)dt + \sigma dz = \mu dt + \sigma dz,$$

ove  $z$  è un processo di Wiener standard risk-neutral.

$$\text{La valutazione al generico tempo } t \text{ è } V(t) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta_t}{r}$$

Applicando il lemma di Ito l'evoluzione del valore dell'impresa segue la dinamica:

$$dV = \frac{1}{r} [\mu dt + \sigma dz] = \frac{1}{r} [(\mu_\eta - \theta\sigma)dt + \sigma dz]$$

Come si vede sia l'EBIT ( $\eta$ ) che la variazione del valore dell'impresa seguono lo stesso processo browniano aritmetico, a meno del termine scalare  $1/r$ , a differenza del modello di GJL in cui EBIT e variazione del valore dell'impresa seguivano entrambi un moto browniano geometrico. Dalla espressione del valore  $V$  si può ricavare l'entità del premio per il rischio:

$$\text{da } Vr^2 = \mu_\eta - \theta\sigma + r\eta_0 \text{ si ottiene } \theta = \frac{\mu_\eta - r}{\sigma} + \frac{r + r\eta_0 - r^2V}{\sigma}$$

Tale espressione del premio per  $V$  non trattato sul mercato aggiunge un termine supplementare al rendimento di equilibrio della EBIT-machine:

$$\text{da } dV = \frac{1}{r} [(\mu_\eta - \theta\sigma)dt + \sigma dz] \text{ sostituendo l'espressione di } \theta \text{ si ottiene}$$

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{r} \left[ \left( \mu_\eta - \sigma \frac{\mu_\eta - r}{\sigma} - \sigma \frac{r + r\eta_0 - r^2V}{\sigma} \right) dt + \sigma dz \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[ (\mu_\eta - \mu_\eta + r - r - r\eta_0 + r^2V) dt + \sigma dz \right] = -\eta dt + rVdt + \frac{\sigma}{r} dz \end{aligned}$$

e riordinando si ottiene  $\eta dt + dV = rVdt + \frac{\sigma}{r} dz$ , in cui l'ultimo è il termine aggiuntivo

Anche AG assumono in prima istanza che l'impresa emetta un debito perpetuo, per semplicità. L'evento insolvenza può essere definito, come in GJL, con riferimento al primo momento in cui il valore  $V$  raggiunge la soglia di default  $V_B$ ; tale soglia è connessa con un limite minimo di EBIT ( $\eta_B$ ) al di sotto del quale scatta la convenienza per gli azionisti ad abbandonare l'impresa nelle mani dei creditori:

$$\text{da } V = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta_0}{r}, \text{ ponendo } \eta_0 = \eta_B \text{ si può definire } V_B = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\eta_B}{r}, \text{ da cui } \eta_B = rV_B - \frac{\mu}{r}$$

La differenza tra  $\eta_0$  e il limite di insolvenza dell'EBIT,  $\eta_0 - \eta_B$ ,

è in sostanza la distance-to-default

La probabilità di insolvenza può essere calcolata ricorrendo alla probabilità di primo passaggio (*first-passage probability* o *hitting probability*), cioè il complemento della probabilità che l'EBIT non tocchi la soglia di default fino al tempo  $t$  (variabile casuale).

La valutazione delle diverse quote dell'EBIT di pertinenza dei singoli pretendenti sviluppata da AG segue quella di GJL, con le necessarie modifiche richieste dal diverso processo stocastico adottato per l'EBIT:

*l'equazione differenziale parziale che in equilibrio di mercato deve essere rispettata diventa*

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\sigma^2}{2r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + P = rF, \text{ che per dividendi e interessi perpetui}$$

$$\text{si semplifica in } \frac{\mu}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\sigma^2}{2r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + P - rF = 0, \text{ la cui soluzione generale}$$

*per la versione omogenea (senza il flusso di cassa  $P$ ) è*

$$F = A_1 e^{-k_1 \eta} + A_2 e^{-k_2 \eta}, \text{ con } A_1 \text{ e } A_2 \text{ parametri definiti dalle condizioni di contorno e}$$

$$k_1 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}, \quad k_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

Il prezzo Arrow-Debreu dello stato del mondo che descrive l'insolvenza,  $p_B$ , nella versione AG è pari a  $p_B = e^{-k_2(\eta_0 - \eta_B)}$ . Il valore dell'impresa in caso di solvibilità è pari a  $V_{\text{solv}} = V - V_B * p_B$ , mentre il valore in caso di default è  $V_{\text{def}} = V_B * p_B$ , la cui somma ovviamente vale  $V_{\text{solv}} + V_{\text{def}} = V$ . I valori di pertinenza degli azionisti, creditori e pubblica amministrazione seguono fedelmente i risultati di GJL indicati in precedenza. AG hanno esplorato con il loro modello strutture finanziarie più complesse, come l'emissione di debito a scadenza definita e debito in diverse tranches: in questa sede tali sviluppi non sono considerati, date le finalità di questo lavoro.

Lo schema concettuale *EBIT-based* è stato adottato da diversi altri autori sia per l'analisi della struttura finanziaria in chiave dinamica, sia per approfondire il rischio di insolvenza e la valutazione dei debiti rischiosi (Simonian, 2012; Kutzker e Schreiter, 2019).

#### 4 CASH FLOW-BASED MODELS

L'analisi del rischio di credito che si ispira all'esame della liquidità e dei flussi di cassa è assai varia, come si vedrà in seguito, ma ad avviso di chi scrive vi è una radice comune che può essere rintracciata nei lavori di G. Donaldson (1961;1962) che, esaminando i problemi di definizione di una corretta politica finanziaria dell'impresa, ha concentrato l'attenzione su quello che ha chiamato "rischio di inadeguatezza della liquidità", intesa come incapacità dell'impresa di effettuare i pagamenti quando necessari: l'insolvenza è il caso estremo di inadeguatezza della liquidità. Il punto chiave dell'analisi, secondo l'autore, è lo studio del comportamento dei *cash flow* dell'impresa nei periodi di recessione, tenendo conto della durata della recessione stessa (la solvibilità è un problema di natura pluriennale<sup>12</sup> e non è sufficiente l'adeguatezza della liquidità di un singolo periodo: detto in altri termini, sono rilevanti le probabilità di sopravvivenza cumulate).

A Donaldson si sono ispirati numerosissime analisi di casi e ricerche sul comportamento delle imprese; valga citare un esempio per tutti, quello di Bruner e Eades (1992) che hanno studiato il caso del fallimento a luglio del 1988 della Revco che era stata oggetto di un LBO appena 19 mesi prima, nel dicembre 1986: ricorrendo alla simulazione Monte Carlo per valutare la sostenibilità della somma dei dividendi e del servizio del debito (interessi e rimborsi) con i flussi di cassa generati dalla gestione (EBIT+ammortamenti+disinvestimenti-investimenti fissi) hanno

<sup>12</sup> Ciò apre il delicato problema della specificazione delle covarianze seriali (oltre a quelle *cross-section*) tra le variabili che determinano i flussi di cassa.

dimostrato come l'insolvenza sia stata determinata dalla grave carenza di patrimonio netto dell'impresa derivante dall'operazione di LBO che ha aggravato oltre misura il peso del debito.

Il tipo di analisi di Bruner e Eades appartiene per così dire al filone degli studi con una forte prevalenza di aspetti contabili. Di seguito verranno invece presi in considerazione approcci più orientati all'economia finanziaria.

#### 4.1 Il modello di Kim, Ramaswamy e Sundaresan (1993)

Gli autori hanno sviluppato un modello per valutare se il rischio di insolvenza del pagamento degli interessi sui prestiti obbligazionari influenzi la valutazione di mercato dei prestiti stessi. A differenza dei modelli strutturali sul rischio di credito basati sul confronto tra valore dell'attivo e ammontare dei debiti da rimborsare, qui il rischio è valutato rispetto alla capacità dei flussi di cassa generati dall'impresa di pagare gli interessi sui debiti finanziari (costituiti da prestiti obbligazionari); il modello è articolato sulle seguenti relazioni che si immaginano operanti in un mercato finanziario perfetto, con transazioni continue, senza frizioni, tasse, asimmetrie informative, costi di transazione e senza che gli investitori abbiano la possibilità di influire sui prezzi (sono *price-takers*):

a) Il valore ( $V$ ) dell'impresa segue il consueto processo lognormale

$$dV = (\alpha - \gamma)Vdt + \sigma_1 V dZ_1, \text{ ove } \sigma_1^2 \text{ è la varianza del rendimento dell'impresa, } \alpha \text{ è il}$$

tasso di rendimento atteso istantaneo e  $Z_1$  è un processo di Wiener standard. La variabile chiave è  $\gamma V$  che rappresenta il flusso di cassa in uscita dall'impresa frutto della politica ottima di investimento e indipendente dalla struttura finanziaria dell'impresa. Tale struttura consiste di *equity* e di un prestito obbligazionario, con un valore nominale pari a  $P$ , che paga interessi periodici. Le clausole del contratto di finanziamento sottoscritto al momento dell'emissione del prestito obbligazionario impediscono agli azionisti di vendere le attività dell'impresa e prelevare il ricavato sotto forma di dividendi. Gli obbligazionisti hanno priorità nei pagamenti e debbono ricevere cedole di interesse al tasso continuo pari a  $c$ . Gli azionisti ricevono la differenza, se positiva, tra il flusso di cassa prelevabile e le cedole di interesse. Se le cedole non vengono pagate, l'impresa è forzata a dichiarare l'insolvenza, che per ipotesi si suppone priva di costi di bancarotta. Quindi la soglia di insolvenza è definibile in termini di valore dell'impresa ( $V^*$ ), pari a  $c/\gamma$  (quando  $V=V^*$  il flusso di cassa prelevabile è appena sufficiente a pagare le cedole agli obbligazionisti)

b) Il tasso di interesse non è deterministico ma stocastico, la cui incertezza è modellata con  $dr = \kappa(\mu - r)dt + \sigma_2 \sqrt{r} dZ_2$ , in cui  $\kappa$  è la velocità con cui  $r$ , il tasso di interesse a breve termine, tende alla media a lungo termine del tasso stesso;  $Z_2$  è un processo di Wiener standard, correlato con  $Z_1$  con  $\text{corr}(dZ_1, dZ_2) = \rho$ . Come si vede gli autori hanno adottato l'approccio di Cox-Ingersoll-Ross per modellare l'incertezza sul tasso di interesse in modo da evitare la formazione di tassi nominali negativi.

c) Il payoff agli obbligazionisti nel caso di insolvenza è  $\min[\delta(\tau)B(r, \tau; c); V^*]$ , ove  $B$  è il valore di titoli di stato certi che scadono in  $\tau$  e  $\delta(\tau)$  è una frazione positiva. In altri termini, gli obbligazionisti nel caso di insolvenza dell'impresa ricevono il minore tra il valore dell'impresa  $V^*$  e una frazione di obbligazioni statali senza rischi. All'emissione si assume  $\delta(0)=1$  in modo da assicurare ai creditori che alla scadenza otterranno il minore tra  $V$  e  $P$ .

Nella definizione degli autori il flusso di cassa prelevabile nell'unità di tempo  $\gamma V dt$  è inteso come flusso di cassa operativo al netto degli investimenti. Come è stato richiamato sopra, nel modello degli autori l'evento default è scatenato dai problemi innescati dalla scarsità di *cash flow* (*cash flow shortage*), che è la vera variabile chiave dell'intera struttura. Poiché l'insolvenza è determinata dalla illiquidità, gli autori non escludono che al momento del default il valore

economico dell'impresa possa essere maggiore dell'ammontare P del debito da rimborsare: in tal caso il default si avrebbe nell'ambito di una combinazione di illiquidità in presenza di solvibilità.

Il modello non ammette soluzioni in forma chiusa<sup>13</sup> e quindi gli autori sono ricorsi alla simulazione Monte Carlo per calcolare il valore di mercato dei bond e gli spread creditizi necessari a compensare gli obbligazionisti per il rischio di insolvenza, adottando valori realistici dei parametri del modello.

#### 4.2 Il modello di Uhrig-Homburg (2005)<sup>14</sup>

L'autrice ha sviluppato un modello sulla struttura finanziaria dell'impresa indebitata che è caratterizzato dalla endogenizzazione dei punti di insolvenza assumendo che l'emissione di nuove azioni sia costosa quando si è vicini al default. La carenza di *cash flow* è una ragione che conduce all'insolvenza, anche se il patrimonio netto è ancora positivo. L'impresa diventa insolvente o perché i flussi di cassa disponibili non sono sufficienti a far fronte ai pagamenti necessari (illiquidità, *cash-flow shortage*) o perché l'ammontare dei debiti supera il valore delle attività (eccesso di debito, *overindebtedness*). In un mondo caratterizzato da mercati finanziari perfetti non sarebbe necessario distinguere i due casi: finché l'impresa resta solvibile, ovvero l'*equity* resta positivo (debiti inferiori al valore dell'attivo), dovrebbe essere sempre possibile avviare operazioni finanziarie integrative e raccogliere i fondi necessari a superare la momentanea crisi di liquidità. La carenza di *cash flow* dovrebbe pertanto verificarsi solo in congiunzione con l'eccesso di debito. L'autrice ha inteso sviluppare un modello che suddivida i due momenti e consideri l'illiquidità come una causa autonoma della crisi di insolvenza; il punto chiave del modello è l'introduzione di costi di transazione legati all'emissione di azioni che si renderebbe necessaria da parte dei proprietari per superare la carenza di liquidità e consentire all'impresa di superare la crisi; se tali costi sono eccessivi, le azioni non vengono emesse e l'impresa resta intrappolata nella crisi di liquidità che la conduce all'insolvenza pur in presenza di condizioni di sostanziale solvibilità.

L'autrice ha in sostanza esteso il noto modello di Leland (1994) nel quale gli azionisti possono sempre superare i problemi di illiquidità tramite immissioni di capitale fresco privo di costi di transazione; in tale modello il default avviene solo per eccesso di indebitamento, quando il valore dell'*equity* scende a zero e l'impresa non è più in grado di aumentare il capitale azionario per far fronte ai pagamenti contrattuali. Inserendo invece, come fa l'autrice, la possibilità di costi di transazione per le emissioni azionarie decise a ridosso del punto di default, si riesce a sdoppiare le cause di insolvenza, separando l'eccesso di debiti (*equity* negativo) dalla crisi di liquidità.

Il valore delle attività segue un processo diffusivo lognormale  $dV = (\mu - \delta)Vdt + \sigma Vdz$ , ove  $\mu$  è il tasso di rendimento atteso istantaneo su  $V$ ,  $\sigma$  è la volatilità del rendimento e  $\delta V$  è il flusso di cassa pagato dall'impresa ai portatori di capitale (corrispondente al *cash flow* al netto delle imposte, prima degli interessi). Come sempre si suppone che i redditi delle attività dell'impresa siano indipendenti dalla struttura finanziaria. Per semplicità il tasso di interesse risk-free ( $r$ ) è costante; inoltre per escludere la dipendenza temporale dei prezzi azionari la struttura dell'indebitamento è statica, composta da un prestito obbligazionario perpetuo con un valore nominale pari a  $F$  e una cedola perpetua annua pari a  $cF$ , fiscalmente deducibile a livello d'impresa con un'aliquota pari a  $\tau$ , che determina benefici fiscali sugli interessi per  $\tau cF$  fino a quando l'impresa non è in default. Il finanziamento del servizio del debito, qui limitato al solo pagamento degli interessi, nel caso in cui il flusso di cassa non sia sufficiente, può avvenire con la cessione di attività, con nuovo indebitamento o con l'emissione di nuove azioni; la prima possibilità è preclusa per l'ipotesi che le attività dell'impresa siano indipendenti dalla struttura finanziaria,

<sup>13</sup> La soluzione del modello deve rispettare la seguente equazione differenziale parziale:  $0.5 \cdot \sigma_1^2 V^2 \frac{\partial^2 W}{\partial V^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{rV} \frac{\partial^2 W}{\partial V \partial r} + 0.5 \cdot \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \kappa(\mu - r) \frac{\partial W}{\partial r} + (r - \gamma)V \frac{\partial W}{\partial V} - rW + c = \frac{\partial W}{\partial \tau}$ , ove  $W$  è il valore economico del prestito obbligazionario e  $\tau$  la sua scadenza. Le condizioni al contorno completano l'equazione. Tale equazione non ha soluzioni analitiche in forma chiusa.

<sup>14</sup> Il suo modello ha punti di contatto con quelli di Kim *et al.*, citato sopra, con quello di Ericsson (2000) e di Anderson e Sundaresan (1996), che non vengono discussi in questa sede.

mentre la seconda possibilità contravviene all'assunzione della struttura statica dell'indebitamento; resta quindi solo l'emissione di capitale azionario. A ogni pagamento degli interessi pertanto i proprietari dell'azienda devono decidere se dichiarare il default o immettere nuovo capitale per pagare i creditori.

Sia definito un livello  $V_B$  del valore delle attività al quale gli azionisti scelgono il default: a tale livello per i creditori si manifesta il diritto di ottenere  $F$  dall'impresa<sup>15</sup>; in caso di insolvenza una quota del valore dell'attivo, pari a  $1-\alpha$ , viene perduta sotto forma di costi di bancarotta  $[(1-\alpha)V_B]$ . Se  $F > \alpha V_B$  i creditori si impossessano dell'impresa, il cui valore ora è  $\alpha V_B$  mentre gli azionisti non ricevono nulla; se invece  $\alpha V_B > F$  i creditori vengono rimborsati totalmente mentre gli azionisti ricevono la differenza  $\alpha V_B - F$  (caso che può essere considerato come una decisione di liquidazione volontaria, ove  $\alpha V_B$  è il valore di liquidazione dell'impresa). Un secondo valore critico dell'attivo,  $V_S$ , è definito in corrispondenza del quale il *cash flow*  $\delta V$  generato dall'impresa è appena sufficiente a pagare gli interessi, al netto dei benefici fiscali,  $cF(1-\tau)$ ; uguagliando  $\delta V = cF(1-\tau)$ , si ha  $V_S = \frac{cF(1-\tau)}{\delta}$ .

Qualsiasi diminuzione di  $V$  al di sotto di  $V_S$  conduce a una carenza del flusso di cassa rispetto agli interessi da pagare (*cash flow shortage point*). L'autrice considera che fino a quando  $V > V_S$  l'emissione di nuove azioni è senza costi, ma man mano che  $V$  tende alla soglia di  $V_S$  le emissioni azionarie comportano il pagamento di costi con un valore unitario pari a  $\beta$  (l'impresa in difficoltà trova maggiori difficoltà nel raccogliere nuovo capitale da vecchi e nuovi soci): poiché l'emissione di nuove azioni ha un ammontare di  $cF(1-\tau) - \delta V(t)$ , il costo della transazione è  $\beta[cF(1-\tau) - \delta V(t)] = \beta\delta[V_S - V(t)]$ . In sintesi se  $V$  è inferiore alla soglia  $V_S$  (ovvero  $V$  compreso tra  $V_S$  e  $V_B$ ) gli azionisti devono affrontare il pagamento di costi di emissione per il nuovo capitale azionario da raccogliere per integrare il *cash flow* e pagare i creditori; se  $V$  invece è al di sotto di  $V_B$  è conveniente per gli azionisti dichiarare l'insolvenza.

Date le condizioni precedenti, in un mercato finanziario efficiente e completo nel quale non sussistono opportunità di arbitraggio<sup>16</sup> il valore dell'*equity*,  $E(V)$ , deve soddisfare le seguenti equazioni differenziali di second'ordine, in condizioni di neutralità al rischio:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} + (r - \delta)V \frac{\partial E}{\partial V} + \delta V - cF(1 - \tau) = rE, & \text{se } V_S \leq V \\ 0.5 \cdot \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} + (r - \delta)V \frac{\partial E}{\partial V} + \delta V - cF(1 - \tau) - \beta\delta(V_S - V) = rE, & \text{se } V_S \geq V \end{cases}$$

La soluzione generale delle equazioni e le soluzioni particolari dettate dalla specificazione delle condizioni al contorno discusse dall'autrice seguono da vicino quelle di Leland e quindi non vengono esaminate in questa sede (si rinvia all'articolo originale dell'autrice). Interpretando  $V$  come valore dell'*equity* dell'impresa non indebitata, il valore dell'*equity*  $E(V)$  che risolve il sistema di equazioni può essere ricondotto alla somma algebrica di:

$E(V) = V - D(V) + TB(V) - BC(V) - EIC(V)$ , ovvero  $E(V)$  = valore dell'impresa *unlevered* – valore del prestito obbligazionario ( $D(V)$ ) + valore attuale dei benefici fiscali sul debito ( $TB(V)$ ) – valore attuale dei costi di bancarotta ( $BC(V)$ ) – valore attuale dei futuri costi di transazione per le emissioni azionarie ( $EIC(V)$ ).

Il valore dell'impresa indebitata (*levered*), ( $U(V)$ ), corrispondente alla somma del valore dell'*equity* e del debito è pari a  $U(V) = V + TB(V) - BC(V) - EIC(V)$ .

Le simulazioni numeriche condotte dall'autrice sulla soluzione del modello, con valori realistici dei parametri, hanno messo in luce che la carenza di liquidità dovuta al *cash flow shortage* avviene quasi sempre in coincidenza con strutture finanziarie caratterizzate da debito eccessivo e quindi il problema della illiquidità tende a non rappresentare un motivo di insolvenza indipendente dall'eccesso di debito. Tuttavia la carenza di *cash flow* influenza la scelta della

<sup>15</sup> In base alle condizioni di mercato ed alla cedola  $c$ ,  $F$  può essere maggiore o minore del valore di mercato del prestito obbligazionario perpetuo.

<sup>16</sup> In cui le attività dell'impresa sono trattate sul mercato (e quindi hanno un prezzo) ovvero, nel caso in cui non siano trattate, esistono strumenti finanziari quotati perfettamente correlati con le attività dell'impresa.

struttura finanziaria ottimale (quella che massimizza il valore dell'*equity*) imponendo una soglia massima al tasso di interesse sul prestito perpetuo ( $c$ ): superato quello, l'illiquidità diventa una ragione indipendente di default. Ne risulta che le imprese che hanno probabilità non piccole di affrontare carenze di *cash flow* dovrebbero emettere debito per ammontari limitati e compatibili con la generazione di cassa aziendale.

#### 4.3 Il modello di Capinski (2007)

Anche Capinski ha proposto una estensione del modello di Merton per tenere conto del possibile impatto dei problemi di liquidità sull'insolvenza dell'impresa. Il default avviene quando l'azienda non ha sufficienti fondi liquidi per effettuare i pagamenti ai creditori alle date contrattuali. L'autore ha considerato due variabili casuali cruciali per modellare la dinamica dei flussi di cassa: il livello delle vendite e l'affidabilità dei clienti nel pagare al momento dovuto i beni acquistati. L'incertezza sulle vendite è collegata alla domanda dei prodotti dell'impresa: nei momenti di prosperità economica possiamo attenderci un alto livello di ricavi e condizioni favorevoli dei clienti, con bassi tassi di insolvenze nei pagamenti, mentre in periodi di crisi economica le vendite saranno basse e l'affidabilità dei clienti parzialmente compromessa: ne deriva che si può considerare una connessione positiva tra le due variabili casuali. Il problema della carenza di liquidità si manifesta quando bassi ricavi si combinano con ritardi negli incassi dai clienti (o addirittura insolvenze nei crediti commerciali). Per superare il momento di illiquidità l'impresa può vendere parte delle sue attività, ma in tal modo mette a repentaglio le sue prospettive future. Nello studio di Capinski il *cash flow* è un risultato del modello, mentre in quelli di altri ricercatori è considerato una variabile a priori.

La variabile  $X(t)$  denota i ricavi dell'impresa, caratterizzati dalla incertezza derivante dalla domanda di mercato. Per generare  $X(t)$  l'impresa sostiene dei costi che l'autore per semplicità assume che vengano pagati istantaneamente come frazione dei ricavi: tutti i costi sono di tipo variabile, per semplicità,  $cX(t)$ , anche se il modello è facilmente estensibile introducendo una quota di costi fissi. Gli incassi da clienti avvengono con un certo ritardo, definito dai termini del contratto di vendita. L'impresa può convertire le vendite in incassi semplicemente ricorrendo a operazioni di factoring pro-soluto ricevendo un controvalore inferiore ai ricavi per tenere conto della attualizzazione rispetto alla scadenza e del rischio di credito gravante sui clienti. Gli incassi sono quindi proporzionali a  $X(t)$ . Per ipotesi le vendite crescono indefinitamente al tasso costante

$$\frac{X(t)(1+g)}{k-g}$$

g. Anche il valore delle attività dell'impresa è proporzionale a  $X(t)$  e pari a  $\frac{X(t)(1+g)}{k-g}$ , ove  $k$  è il costo del capitale. Pertanto le vendite evolvono in base a un processo Browniano geometrico

$dX(t) = a_1 X(t)dt + \sigma_1 X(t)dW_1$ ; nella conversione delle vendite in incassi una parte viene perduta (per attualizzazione e per il prezzo del rischio di credito commerciale) e quindi l'impresa riceve un flusso di cassa pari a  $\gamma X(t)$ , con  $\gamma < 1$ , ove  $\gamma$  è una variabile casuale del tipo  $\gamma = F(Y(t))$ , in cui  $Y(t)$  è una variabile casuale ausiliaria *mean-reverting* che rappresenta lo stato della condizione

finanziaria dei clienti e segue un processo  $dY(t) = a_2(m - Y(t))dt + \sigma_2 dW_2(t)$ ; i due processi di Wiener,  $W_1$  e  $W_2$  sono correlati con un coefficiente pari a  $\rho$ . La funzione  $F$  converte un campo di esistenza tra  $-\infty$  e  $+\infty$  in un campo compreso tra 0 e 1.

Il debito è rimborsato con una rata annua costante pari ad  $A$ , comprensiva di capitale e interessi, con  $A < rD$  ove  $D$  è l'ammontare del debito. Sull'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$  vale  $A dt$ , così come i costi da sostenere sono  $cX(t)dt$ . Se il tasso di interesse ( $r$ ) è costante e i pagamenti sono fatti nel continuo tra 0 e  $T$ , l'ammontare del debito residuo in  $t$  vale

$L(t) = e^{rt} \left( D - \frac{A}{r} \right) + \frac{A}{r}$ , ove  $A = \frac{rDe^{rT}}{e^{rT} - 1}$  che rappresenta la versione nel continuo dell'ammortamento a rata costante.

Il flusso di cassa cumulativo,  $C(t)$ , generato dai ricavi è dato dal seguente processo  $dC(t) = [F(Y(t))X(t) - cX(t) - A]dt$ . Se il flusso di cassa è negativo, l'impresa deve vendere

parte delle sue attività per evitare l'insolvenza; se invece è positivo, il flusso di cassa può essere reinvestito, aumentando la dotazione delle attività e i futuri ricavi. Il valore delle attività,  $V(t)$ , è per ipotesi proporzionale alle vendite, ovvero  $V(t)=\alpha X(t)$ , con  $\alpha>0$ ; quindi il processo che descrive la variabile  $X(t)$  può essere modificato in  $dX(t) = a_1 X(t)dt + a_1 \alpha dC(t) + \sigma_1 X(t)dW_1$ . Pertanto il modello dell'autore è articolato sulla seguente coppia di equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{cases} dX(t) = a_1 [X(t) + \alpha(F(Y(t))X(t) - cX(t) - A)]dt + \sigma_1 X(t)dW_1(t) \\ dY(t) = a_2(m - Y(t))dt + \sigma_2 dW_2(t) \end{cases}$$

L'insolvenza si verifica quando  $V(t)$  attraversa la barriera  $L(t)$ , che significa che anche se tutte le attività dell'impresa fossero vendute i creditori non potrebbero essere pagati interamente. La

probabilità di default quindi vale  $prob\left(\min_{t \geq 0} \frac{1}{\alpha} X(t) < L(t)\right)$ . L'autore ha ottenuto una soluzione in forma chiusa del modello sulla variabile  $X(t)$ , ma poiché la valutazione del debito rischioso dipende dalla valutazione di una opzione put di tipo americano scritta su  $X(t)$  e con prezzo d'esercizio  $(1/\alpha)L(t)$  che non soluzione in forma chiusa, ha fatto ricorso alla simulazione Monte Carlo per generare la distribuzione dei tempi di insolvenza e delle relative probabilità di default.

#### 4.4 I modelli di Chen, Liao e altri – prima parte<sup>17</sup>

Chen e Liao insieme ad altri coautori hanno sviluppato due tipi di modelli incentrati sull'uso dei flussi di cassa: nella prima tipologia, richiamata in questa sezione, i *cash flow* sono usati per calcolare il valore economico delle attività dell'impresa e ricavare le probabilità di insolvenza lungo le linee del modello di Merton; nella seconda tipologia, discussa nella sezione successiva, i flussi di cassa sono impiegati per valutare il rischio di insolvenza derivante da illiquidità.

Gli autori, in luogo di far riferimento al valore di mercato delle attività dell'impresa, ne determinano il valore intrinseco attualizzando i *free cash flow* generati in base a un modello stocastico. La dinamica dei flussi di cassa include sia effetti del ciclo industriale, sia effetti specifici dell'impresa. Gli autori, facendo riferimento alla teoria economica, suppongono che i manager operino in modo da mantenere stabile il livello dei *free cash flow*, con un trend corrispondente alla politica di crescita prestabilita nei piani aziendali, in modo da evitare tanto le crisi di liquidità quanto i costi di agenzia. Il modello dei *cash flow* usato dagli autori quindi si basa su un processo gaussiano *mean-reverting*; la struttura del processo è *state-dependent* in modo da incorporare l'impatto delle variazioni del ciclo industriale, caratteristico del settore in cui operano le imprese: i parametri del modello sono quindi *time-varying*. Le previsioni sullo stato del ciclo sono usate per aggiustare i parametri del processo sui flussi di cassa, che a loro volta generano la distribuzione non condizionale multiperiodo del valore delle attività dell'impresa.

Il *free cash flow* ( $C_t$ )<sup>18</sup>, che è la variabile chiave del modello degli autori, è definito come flusso di cassa operativo (autofinanziamento meno variazione del circolante operativo) al netto degli investimenti non discrezionali; questi ultimi riguardano le spese in conto capitale necessarie per mantenere i livelli di capacità e di produttività dell'impresa e sostenerne la crescita; se non venissero effettuati tali investimenti, l'azienda si troverebbe impoverita nelle sue prospettive e non sarebbe in condizioni di generare i flussi di cassa previsti dal modello; gli investimenti discrezionali, che, se attuati, modificano in profondità le opportunità di crescita, restano al di fuori della definizione dei flussi di cassa del modello. Poiché l'impresa vive immersa nel suo settore è lecito attendersi una stretta relazione tra  $C_t$  e lo stato del ciclo industriale; anche i fattori specifici dell'impresa derivanti dalle politiche a lungo termine adottate dai manager hanno un impatto sui flussi di cassa. Per eliminare l'effetto di scala  $C_t$  è misurato rispetto al valore contabile delle attività dell'impresa.

<sup>17</sup> Liao, Chen e Wu, 2007; Chen e Liao, 2004; Liao e Chen, 2005; 2006.

<sup>18</sup>  $C_t = EBIT_t(1 - \text{aliquota fiscale}) + \text{Quota Ammortamento}_t - \text{Investimenti}_t - \text{variazione del capitale circolante operativo (non-cash and non-financial-debt items)}$ . In un'altra versione di free cash flow gli autori deducono anche i dividendi distribuiti.

Per decidere la struttura del modello da usare per i *cash flow* gli autori hanno elaborato le osservazioni sui dati trimestrali di un certo numero di società quotate a New York e, in alcune versioni dei *papers*, a Taiwan: le serie storiche hanno messo in luce caratteristiche stocastiche tipiche di processi *mean-reverting* (ritorno verso la media, tipo Ornstein-Uhlenbeck). Per sterilizzare l'effetto delle politiche di credito commerciale,  $C_t$  è stato calcolato come media mobile annuale dei dati disponibili (le medie mobili hanno consentito di ripulire un po' l'erraticità delle osservazioni dei bilanci trimestrali). Il modello sui *free cash flow* si articola sulle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \omega_t + v_t \\ dC_t = a_t [b_t - C_{t-1}] dt + \sigma_t dz, \text{ con } dz = \varepsilon \sqrt{dt}, \varepsilon \sim N(0;1) \end{cases}$$

Nella prima equazione  $\alpha_0$  rappresenta un attributo fisso specifico dell'impresa,  $v$  è uno shock casuale specifico dell'impresa (quindi  $\alpha_0 + v_t$  indicano la componente idiosincronica che influisce sui *cash flow* dell'impresa) mentre  $\omega$  contraddistingue l'effetto del ciclo macro-industriale e  $\alpha_1$  è il coefficiente con cui quest'ultimo impatta i flussi di cassa. La seconda equazione è il processo gaussiano *mean-reverting*, in cui  $a_t$  è la velocità di ritorno verso la media (velocità di *mean-reversion*),  $b_t$  è il livello medio di lungo periodo di  $C_t$  valutato in  $t$ ,  $\sigma_t$  è la volatilità della variazione dei *cash flow* e  $dz$  è un processo di Wiener standard. Si suppone che il parametro  $a_t$  resti complessivamente stabile nel tempo (influenzato da variabili strutturali quali le forze competitive del settore, e così via), mentre sia  $b_t$  che la volatilità dovrebbero risentire del ciclo e delle politiche aziendali.

Lo stato del ciclo macro-industriale è descritto in termini di tasso di variazione ( $\eta_t$ ) della

$$\eta_t = \frac{\omega_t - \omega_{t-1}}{\omega_{t-1}}$$

variabile  $\omega_t$ : . Anche lo stato del ciclo è modellato con un processo *mean-reverting*:

$d\eta_t = a_\eta [b_\eta - \eta_{t-1}] dt + \sigma_\eta d\zeta$ , in cui  $a_\eta$  è la velocità di *mean-reversion* del tasso di variazione dello stato del ciclo,  $b_\eta$  indica il livello medio di lungo periodo del tasso di variazione dello stato del ciclo,  $\sigma_\eta$  è la volatilità della variazione dello stato del ciclo e  $d\zeta$  un processo di Wiener standard, correlato con  $dz$  con il coefficiente  $\rho$  ( $\text{cov}(d\zeta, dz) = \rho dt$ )<sup>19</sup>. Per ipotesi si assume che i parametri del modello sullo stato del ciclo siano strutturalmente stabili. Poiché il processo è del tipo Ornstein-Uhlenbeck, la densità condizionale di un futuro stato del ciclo è una distribuzione normale con media e varianza seguenti (valutate al tempo  $s$ ):

$$E(\eta_s | \eta_t) = \eta_t e^{-a_\eta(s-t)} + b_\eta (1 - e^{-a_\eta(s-t)})$$

$$\text{var}(\eta_s | \eta_t) = \frac{\sigma_\eta^2 (1 - e^{-2a_\eta(s-t)})}{2a_\eta}$$

, mentre la distribuzione non condizionale è una

normale con  $N\left(b_\eta, \frac{\sigma_\eta^2}{a_\eta}\right)$ . La media della densità condizionale può essere riscritta come:

$$\eta_s = \eta_t e^{-a_\eta(s-t)} + b_\eta (1 - e^{-a_\eta(s-t)}) + \xi_s, \text{ che nel discreto diventa } \eta_{t+\Delta t} = \eta_t e^{-a_\eta \Delta t} + b_\eta (1 - e^{-a_\eta \Delta t}) + \xi_{t+\Delta t}$$

ove  $\xi$  è un errore con distribuzione normale con media nulla e varianza uguale alla varianza condizionale.

<sup>19</sup> Nel continuo si ha:

$\eta_t dt = \frac{d\omega_t}{\omega_t}$ , da cui  $\eta_t = \int \frac{d\omega_t}{\omega_t} = f(\omega_t)$ . Dalla equazione di  $C_t$  si ha  $dC_t = \alpha_1 d\omega_t + \beta dv_t = \alpha_1 (\eta_t \omega_t) dt + \beta dv_t$ , e poiché  $\alpha_1 \omega_t = C_t - \alpha_0 - \beta v_t$ , si ottiene  $dC_t = \eta_t (C_t - \alpha_0 - \beta v_t) dt + \beta dv_t = (\eta_t C_t - \eta_t \alpha_0) dt + (-\eta_t \beta dv_t + \beta dv_t)$ . Ponendo  $\theta_t = -\eta_t \alpha_0$ ,  $dv_t = \gamma dz_t$  e  $dz_t = v_t \sqrt{dt}$ , si ha  $dC_t = (\theta_t - \eta_t C_t) dt + \beta (\gamma - \eta_t \sqrt{dt}) dz_t$ , e sostituendo  $\sigma_t = \beta (\gamma - \eta_t \sqrt{dt})$  si ottiene l'espressione  $dC_t = (\theta_t - \eta_t C_t) dt + \sigma_t dz_t$  che nel modello è riscritta come  $dC_t = a_t (b_t - C_t) dt + \sigma_t dz_t$

Quella relazione può essere semplificata ai fini della stima econometrica in un modello autoregressivo del primo ordine  $\eta_t = \alpha + \beta\eta_{t-\Delta t} + e_t$ , ove  $\alpha = b_\eta(1-\beta)$ ,  $\beta = e^{-a_\eta\Delta t}$ , da cui è possibile ottenere i parametri necessari alle stime, ovvero:

$$a_\eta = \frac{-Ln\beta}{\Delta t}, b_\eta = \frac{\alpha}{1-\beta}, \sigma_\eta^2 = \frac{2a_\eta \text{ stima var}(\eta_{t+\Delta t} | \eta_t)}{1 - e^{-2a_\eta\Delta t}}$$

I parametri *time-varying*  $b_t$  e  $\sigma_t$  del modello sul *cash flow* sono collegati ai loro valori iniziali con:

$$b_t = b_0(1 + \psi_t^b) \text{ e } \sigma_t = \sigma_0(1 + \psi_t^\sigma),$$

$$\text{ove } \psi_t^b = \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \hat{\omega}_t}{\lambda^* b_0} \right)^{\frac{1}{i}} - 1 \text{ e } \psi_t^\sigma = \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \hat{\omega}_t}{\lambda^* b_0} \right)^{\frac{1}{i}} - \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \hat{\omega}_t}{\lambda^* b_0} \right)^{\frac{1}{i-1}}$$

in cui  $\hat{\omega}$  è lo stato atteso del ciclo e  $\lambda^*$  rappresenta un fattore di aggiustamento relativo alla dimensione dell'effetto dei futuri cash flow sulla media di lungo periodo  $b$ ,

Nelle stime numeriche gli autori pongono  $\lambda^*$  uguale a 1<sup>20</sup>. Pertanto il modello sui flussi di cassa può essere riscritto come  $dC_t = a_0 [b_0(1 + \psi_t^b) - C_{t-1}] dt + \sigma_0(1 + \psi_t^\sigma) dz$ .

Simulando ripetutamente le traiettorie dei flussi di cassa  $C_t$  e attualizzandoli a un tasso congruo per rischio ( $\gamma_A$ ) si ottiene la distribuzione del valore intrinseco delle attività dell'impresa. Adottando un approccio standard per la valutazione delle imprese gli autori suppongono che la crescita dei flussi di cassa segua due stadi: nel primo stadio  $C_t$  segue un processo state-dependent fino al periodo T e successivamente nel secondo stadio la crescita avviene in stato stazionario al tasso g. Se T è grande il valore attuale dei flussi successivi a T è una parte minoritaria del valore complessivo delle attività. Quindi il valore  $V_{it}$  delle attività dell'impresa i-esima al tempo t vale

$$V_{it} = \left[ \sum_{\tau=t+1}^T \frac{C_{i\tau}}{(1 + \gamma_A)^{\tau-t}} \right] + \frac{C_{iT}(1 + g)}{(1 + \gamma_A)^{T-t}(\gamma_A - g)}$$

Nell'applicazione numerica gli autori hanno posto T=10 per mitigare l'impatto di errori nella stima del tasso g; quest'ultimo è approssimato con la somma di tre termini: il tasso di crescita aziendale  $g_c = \gamma_1 \kappa$ , ove  $\gamma_1$  è il tasso di rendimento medio di lungo periodo del capitale investito e  $\kappa$  è il tasso di reinvestimento medio di lungo periodo; il tasso di crescita industriale  $g_i = b_\eta$ ; il tasso di crescita macro del PIL  $g_M$ . Il tasso g è posto uguale a una

media ponderata dei tre tassi indicati sopra:  $g = \delta_c g_c + (1 - \delta_c) [\delta_I g_I + (1 - \delta_I) g_M]$ , ove  $\delta_{c,I}$  sono i pesi per le ponderazioni calcolati in base all'importanza dell'impresa nel suo settore e del settore sul totale dell'economia. La stima del tasso  $\gamma_A$  è stata basata essenzialmente sul CAPM.

Come si vede i risultati delle simulazioni determinano la distribuzione dei valori delle attività nel mondo reale, senza dover ricorrere al mondo neutrale al rischio. Ugualmente le probabilità di default ricavate dalla relazione tra il valore delle attività e la barriera d'insolvenza sono probabilità reali e non *risk-neutral*. L'evento default è modellato come in Merton, quando il valore dell'attivo  $V_t$  scende al di sotto della soglia di insolvenza (ammontare del debito o, come in KMV, somma dei debiti a breve e di metà di quelli a lungo termine) contraddistinta con  $\bar{L}_t$ ; essa identifica anche la massima perdita sul debito quando il valore dell'attivo si azzerava o diventa negativo. Definendo con  $f_t(V)$  la distribuzione non condizionale del valore dell'attivo al tempo t, la probabilità di

<sup>20</sup> In un'altra versione dei parametri proposta dagli autori i valori sono posti uguali a:

$$\psi_t^b = \frac{\hat{\omega}_{t-1} - \bar{\omega}}{\bar{\omega}} \alpha_1 \text{ e } \psi_t^\sigma = \frac{\hat{\omega}_{t-1} - \hat{\omega}_{t-2}}{\bar{\omega}} |\alpha_1|, \text{ ove } \hat{\omega} = \text{stima dello stato atteso del ciclo}$$

$\bar{\omega}$  = media di lungo periodo dello stato del ciclo e  $\alpha_1$  = sensitività dei flussi di cassa rispetto alle fluttuazioni del ciclo

default vale  $PD_t = \int_{-\infty}^{\bar{L}_t} f_t(V)dV$ ; la perdita attesa ( $EL_t$ ), al netto del valore di recupero in caso di default, è pari a<sup>21</sup>  $EL_t = \bar{L}_t(PD_t) - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$ . La *Loss Given Default*<sup>22</sup> ( $LGD_t$ ) ammonta a  $LGD_t = \bar{L}_t - \frac{1}{PD_t} \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$ , mentre il tasso di recupero (*recovery rate*,  $RR_t$ ) è  $RR_t = 1 - \frac{LGD_t}{\bar{L}_t} = \frac{1}{\bar{L}_t(PD_t)} \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$ ; infine l'*expected recovery rate* ( $ERR_t$ , corrispondente a  $1-EL/Debito$ )<sup>23</sup> vale  $ERR_t = 1(1 - PD_t) + RR_t PD_t = 1 + PD_t(RR_t - 1)$ .

Uno dei vantaggi del modello sottolineato dagli autori riguarda il fatto che la sua applicazione richiede solo l'uso di dati tratti dalle informazioni economiche e di bilancio comunemente disponibili. I risultati delle applicazioni numeriche condotte dagli autori hanno messo in luce una performance del modello migliore rispetto ad altri strutturali noti nella letteratura.

#### 4.5 I modelli di Chen, Liao e altri – seconda parte<sup>24</sup>

In un secondo tipo di analisi Chen e Liao hanno concentrato la loro attenzione direttamente sul rischio di illiquidità, partendo dallo schema concettuale già messo a punto nella prima tipologia di analisi, sintetizzata al punto precedente.

Qui la variabile cruciale è il saldo della liquidità per unità di attivo ( $LB/A$ ), modellata in termini multiperiodali con processi *mean-reversion* e coefficienti *time-varying* (*time-dependent stochastic liquidity balance model*). Con il modello stocastico si genera la distribuzione di probabilità del saldo di liquidità disponibile nei periodi futuri. L'evento insolvenza è individuato quando il saldo della liquidità ( $LB/A$ ) diventa negativo, indipendentemente dal fatto che il valore patrimoniale dell'impresa si mantenga superiore all'ammontare dei debiti: il saldo della liquidità disponibile è una misura diretta della capacità dell'impresa di onorare puntualmente i propri impegni.

<sup>21</sup> La perdita attesa può essere scritta come:

$$EL_t = \int_0^{\bar{L}_t} (\bar{L}_t - V)f_t(V)dV + \bar{L}_t \int_{-\infty}^0 f_t(V)dV = \bar{L}_t \int_{-\infty}^{\bar{L}_t} f_t(V)dV - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$$

e poiché  $\int_{-\infty}^{\bar{L}_t} f_t(V)dV = PD_t$ , si ottiene  $EL_t = \bar{L}_t PD_t - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$

<sup>22</sup> Dalla espressione della perdita attesa ( $EL$ ):

$$EL_t = PD_t LGD_t = \bar{L}_t PD_t - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV \text{ si ricava } LGD_t = \frac{1}{PD_t} \left[ \bar{L}_t PD_t - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV \right] = \bar{L}_t - \frac{1}{PD_t} \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV$$

<sup>23</sup> L'espressione si ricava come segue:

$$ERR_t = 1 - \frac{\bar{L}_t PD_t - \int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV}{\bar{L}_t} = 1 - PD_t + \frac{\int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV}{\bar{L}_t} \text{ e poichè dalla definizione di } RR_t \text{ si}$$

ricava  $\int_0^{\bar{L}_t} Vf_t(V)dV = RR_t \bar{L}_t PD_t$ , sostituendo si ha  $ERR_t = (1 - PD_t) + RR_t PD_t$

<sup>24</sup> Liao, Chen eChou, 2005; Liao e Chen, 2004; 2005b; Chen, Liao e Wu, 2009a; 2009b.

La definizione di liquidità adottata dagli autori è la seguente:

LB (t) = Liquidità iniziale (t-1) [composta dalla somma delle disponibilità liquide e degli investimenti a breve termine in titoli e altre attività finanziarie prontamente vendibili] + flusso di cassa operativo corrente (t) (media mobile trimestrale dei *cash flow*) al netto degli interessi passivi pagati – rimborsi (o riduzioni nette) di debiti (t) + emissioni (od aumenti netti) di debiti (t) + flussi di cassa dagli investimenti finanziari (t) + emissioni azionarie discrezionali (t). Aumenti di debiti ed emissioni azionarie sono considerate solo se necessarie per ottenere un saldo iniziale di liquidità non negativo.

La fonte principale della liquidità aziendale dovrebbe essere normalmente il flusso di cassa operativo; se l'impresa ricorre troppo spesso a fonti diverse dai flussi gestionali segnala al mercato che le prospettive aziendali sono poco favorevoli e tendenzialmente rischiose.

La liquidità per unità di attivo mette in luce alcune caratteristiche statistiche osservate dagli autori su un gruppo di società quotate a New York e, in certe versioni della ricerca, a Taiwan: principalmente la *mean-reversion* e la distribuzione normale dei saldi di liquidità sull'attivo. Pertanto per modellare la LB/A gli autori hanno fatto ricorso a un processo gaussiano *mean-reverting*, con parametri influenzati dalle variazioni dello stato del ciclo industriale. L'equazione che descrive lo *state-dependent stochastic liquidity model* è pertanto:

$$d(LB / A_t) = a(t)[b(t) - LB / A_{t-1}]dt + \sigma(t)dz, \text{ con } dz = \varepsilon\sqrt{dt} \text{ ed } \varepsilon \sim N(0;1),$$
 ove  $a(t)$  è la velocità di ritorno verso la media,  $b(t)$  il livello di lungo periodo di LB/A valutato al tempo  $t$  e  $\sigma(t)$  è la volatilità delle variazioni di LB/A, cioè  $\sigma(t) = \sqrt{\text{var}(d(LB / A_t))}$ . Gli autori assumono per semplicità che  $a(t)$  sia costante.

Lo stato del ciclo economico è modellato con le stesse variabili ed equazioni del primo tipo di analisi sviluppato dagli autori:  $d\eta_t = a_\eta [b_\eta - \eta_{t-1}]dt + \sigma_\eta d\zeta$ , da cui si ricavano le relazioni con cui aggiornare i parametri  $b(t)$  e  $\sigma(t)$  del modello stocastico della liquidità:  $b_t = b_0(1 + \psi_t^b)$  e  $\sigma_t = \sigma_0(1 + \psi_t^\sigma)$ , secondo le definizioni riportate nella sezione precedente<sup>25</sup>. L'equazione differenziale stocastica che descrive la dinamica della liquidità diventa pertanto:

$$d(LB / A_t) = a_0 [b_0(1 + \psi_t^b) - LB / A_{t-1}]dt + \sigma_0(1 + \psi_t^\sigma)dz$$

Le stime dei parametri sia dell'equazione delle variazioni dello stato del ciclo che di quella riguardante la liquidità seguono le stesse procedure descritte in precedenza. In sostanza prima si stimano i valori iniziali dei parametri  $a_0, b_0$  e  $\sigma_0$  e poi si aggiornano  $b(t)$  e  $\sigma(t)$  con i collegamenti con lo stato del ciclo.

Simulando le traiettorie di LB/A si ottiene una valutazione multiperiodale del saldo di liquidità disponibile per l'impresa. Ripetendo tale simulazione molte volte si viene a disporre per ciascun periodo della distribuzione di frequenza del saldo di liquidità, da cui è possibile ricavare la probabilità di insufficienza delle disponibilità per affrontare il servizio del debito. L'insolvenza causata da illiquidità è specificata quando LB/A assume valori negativi; dalla distribuzione di frequenza del saldo di liquidità è possibile quindi ottenere la probabilità di illiquidità e la ELD (*expected liquidity deficiency*) ovvero la perdita attesa per unità di attivo quando la LB/A è negativa:

<sup>25</sup> La relazione tra LB/A e lo stato del ciclo è esprimibile con  $LB / A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \omega(t)$ , a partire dalla quale è possibile aggiornare i coefficienti  $b$  e  $\sigma$  con

$$b(t) = b_0 \left( 1 + \left[ \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \omega(t)}{b_0} \right)^{1/\alpha} \right] - 1 \right)$$

e

$$\sigma_{LB/A}(t) = \sigma_{LB/A}(0) \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \omega(t)}{b_0} \right)^{1/\alpha} - \left( \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \omega(t-1)}{b_0} \right)^{1/\alpha} \right]$$

$$\text{Probabilità di default} = PD_t = \int_{-\infty}^0 f(LB/A_t) d(LB/A_t)$$

$$\text{Expected liquidity deficiency} = ELD_t = \int_{-\infty}^0 (1 - LB/A_t) f(LB/A_t) d(LB/A_t)$$

In alternativa a LB/A gli autori in un'altra versione della stessa analisi hanno usato il rapporto tra la liquidità disponibile e gli esborsi per i pagamenti correnti (solvency ratio - SR); in termini analitici il SR è definito come segue:

$$SR_t = \frac{CFO_t + Liquidità_{t-1}}{Outflow_t + Rimborsi_t + Interessi_t + Tasse_t}$$

, in cui la liquidità (t-1) include le disponibilità liquide e i titoli e le altre attività finanziarie prontamente realizzabili, CFO è uguale a EBIT+ammortamenti (ed assimilati)+diminuzioni nette di crediti commerciali, scorte e altre attività+ aumenti dei debiti commerciali+ disinvestimenti e altre partite, *Outflow* comprende essenzialmente la diminuzione dei debiti commerciali e gli investimenti non discrezionali, mentre i Rimborsi riguardano le diminuzioni nette dei debiti a breve e a lungo termine. Sia CFO che *Outflow* sono calcolati come medie mobili di dati trimestrali.

Anche il *solvency ratio* segue un processo stocastico *mean-reversion* in termini logaritmici:

$$d(\text{Ln}SR_t) = a(t)[b(t) - \text{Ln}SR_{t-1}]dt + \sigma(t)dz, \text{ ove } \sigma(t) = \sqrt{\text{var}(d(\text{Ln}SR_t))}$$

I parametri del processo assumono significati simili a quelli dei processi discussi nei punti precedenti. Il parametro  $a(t)$  viene assunto costante per semplicità. Anche in questo caso i parametri  $b$  e  $\sigma$  vengono aggiornati con la previsione dello stato del ciclo industriale<sup>26</sup>:  
 $d(\text{Ln}SR_t) = a(0)[b(0)(1 + \psi_t^b) - \text{Ln}SR_{t-1}]dt + \sigma(0)(1 + \psi_t^\sigma)dz$

L'evento insolvenza, ovvero la crisi di illiquidità, si verifica quando il *solvency ratio* si colloca su valori inferiori a 1. Dalla distribuzione di frequenza del *solvency ratio* ottenuta con la simulazione Monte Carlo del processo stocastico si ricava la probabilità della crisi di liquidità sia uniperiodale (t) che multiperiodale:

$$\text{Probability of liquidity crisis}_t = PD_t = \int_0^1 f(SR_t) d(SR_t)$$

$$\text{Expected Liquidity Ratio Given Insolvency}_t = \int_0^1 SR_t f(SR_t) d(SR_t)$$

$$\text{Expected Liquidity Gap Ratio}_t = \int_0^1 (1 - SR_t) f(SR_t) d(SR_t)$$

#### 4.6 Un approccio semplificato in termini CFaR

Una versione semplificata dell'analisi del rischio di liquidità è quella che si richiama al *cash-flow-at-risk* (CFaR): si veda ad esempio Jankensgard (2008). Il *cash-flow-at-risk* è una misura di rischio su dati di flusso analoga al *Value-at-Risk*, che è invece una misura di rischio su dati di consistenza. Il CFaR misura l'entità della massima diminuzione (*shortfall*) del flusso di cassa che l'impresa rischia di subire entro un dato orizzonte temporale (generalmente 1 anno) e nei limiti di un certo intervallo di confidenza: il CFaR|0.95 ad esempio misura la massima riduzione del *cash flow* con un grado di confidenza del 95% (determinato in base al tipo di distribuzione statistica dei *cash flow*). Tale misura può essere applicata a una pluralità di problematiche aziendali: dagli investimenti fissi, alla gestione del circolante, a quella della liquidità; in questa sede si ragiona sulla applicazione del CFaR al rischio di credito in termini di incapacità

<sup>26</sup> A partire dalla relazione  $\text{Ln}SR_t = \alpha_0 + \alpha_1 \omega(t)$ , ove  $\omega(t)$  indica lo stato del ciclo industriale.

dell'impresa di far fronte agli impegni contrattuali verso i creditori finanziari. La misurazione del CFaR e dei problemi connessi sono state ben illustrate da Stein *et al.* (2001).

Va sottolineato che un CFaR al 95% non fornisce informazioni specifiche sulla possibilità che si verifichi un evento di default, ma solo l'entità della perdita massima che può subire il flusso di cassa dell'impresa se raggiunge uno scenario aziendale estremamente severo, lasciando fuori solo i 5 scenari peggiori su 100. La domanda chiave a cui il CFaR risponde è pertanto la seguente: alla luce degli impegni finanziari che devono essere rispettati, l'impresa è in grado di farvi fronte se dovesse verificarsi uno scenario avverso fino al 95% di probabilità?

L'intervallo di confidenza deve riflettere il grado di avversione al rischio dell'impresa: tanto maggiore (minore) è l'avversione al rischio, tanto più alto (basso) deve essere il livello di probabilità che si intende adottare per la misura del CFaR (ad esempio 99% (90%)). Per converso l'impresa può stabilire la sua *debt capacity* come il livello di debito compatibile con la possibilità di far fronte al regolare servizio del debito anche nel caso in cui si verificasse uno scenario particolarmente sfavorevole, fino a un livello di probabilità prestabilito. La *debt capacity* condizionata al flusso di cassa disponibile nello scenario avverso al 95% sarebbe scrivibile come  $\max(\text{Debt}|\text{CFaR}_{0,95})$ .

## 5 IL RISCHIO DI ILLIQUIDITÀ NEI DATI MEDIIOBANCA

L'analisi del rischio di illiquidità è stata applicata ai Dati Cumulativi di Mediobanca. L'edizione 2019 dei dati Mediobanca riguarda 2095 imprese aggregate secondo la tecnica del campione chiuso e rettificato per garantire omogeneità temporale del perimetro dei gruppi aziendali considerati. Come sempre le edizioni annuali dei dati Mediobanca coprono un arco di 10 anni. Per avere un orizzonte più ampio l'edizione 2019 è stata integrata con le edizioni del 2013 e del 2007 retropolando le serie storiche a partire dalla edizione più recente, secondo una metodologia già illustrata nell'articolo del 2014 (Varetto, 2014); il risultato della rielaborazione copre il periodo 1997-2018 con 22 osservazioni annuali<sup>27</sup>. L'elaborazione è stata limitata ai soli settori manifatturieri; l'aggregato manifatturiero è ottenuto dalla somma dei singoli settori, senza usare l'analoga scheda resa disponibile nella pubblicazione di Mediobanca. La copertura dei Dati Mediobanca nell'industria manifatturiera è pari al 51% del fatturato, del 60% delle esportazioni e del 35% del numero dei dipendenti.

La variabile cruciale usata per stimare il rischio di illiquidità è la somma di:

- 1) Liquidità del periodo precedente [ $\text{Liq}(t-1)$ ], comprensiva delle disponibilità liquide e delle attività finanziarie a breve termine
- 2) Flusso di cassa operativo netto [ $\text{Flx}(t)$ ], definito come somma algebrica del flusso di cassa operativo (autofinanziamento operativo – variazione del capitale circolante operativo), al netto degli investimenti netti in immobilizzazioni materiali, immateriali e finanziarie, comprensivo dei proventi finanziari e al netto degli oneri finanziari e delle imposte. Il dettaglio dei dati disponibili non consente di distinguere tra investimenti non discrezionali e quelli discrezionali; si è deciso di tenere conto anche degli investimenti netti in immobilizzazioni finanziarie, ritenuti complementari alla politica di investimenti fissi ed immateriali; non sono stati detratti i dividendi pagati in quanto considerati esborsi sacrificabili (rinviabili) in presenza di razionamenti e mancanza di disponibilità di risorse finanziarie.

La somma delle due componenti è denominata Liquidità Complessiva [ $\text{L}(t)$ ] e viene messa a confronto con un ammontare di impegni finanziari definito come quota di rimborso dei debiti finanziari a medio e lungo termine [ $\text{R}(t)$ ]; tale quota di rimborso è stimata assumendo che l'ammontare dei debiti finanziari a medio e lungo termine di inizio periodo abbia una durata residua media ponderata di 8 anni<sup>28</sup>. A titolo di confronto sono stati calcolate le rate di rimborso

---

<sup>27</sup> Vale come sempre in questi campioni il *caveat sul survival bias*.

<sup>28</sup> La durata media ponderata di 8 anni è ritenuta ragionevole, in assenza di dettagli specifici.

sul totale di inizio periodo dei debiti finanziari a breve e a lungo termine. Dagli impegni finanziari sono stati esclusi i dividendi per lo stesso principio evocato sopra. La probabilità di illiquidità è pertanto definita come  $\text{Prob}[L(t) < R(t)]$ .

La Liquidità Complessiva, per assunzione, segue un processo *mean-reverting* tipo Ornstein-Uhlenbeck (OU), in tempo discreto:  $\Delta L(t) = a[b - L(t-1)]\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ , con  $\Delta t = 1$  e  $\varepsilon \sim N(0;1)$ .

L'unità di tempo è semplicemente l'anno di osservazione, non essendo disponibili informazioni infrannuali nella pubblicazione di Mediobanca. Il coefficiente  $a$  è la volatilità di ritorno verso la media di lungo periodo di  $L$ , rappresentata dal coefficiente  $b$ . Per semplicità, tenuto conto delle limitazioni del numero delle osservazioni, i due coefficienti  $a$  e  $b$  sono considerati costanti e non *time-varying* in funzione delle variazioni del ciclo economico-industriale<sup>29</sup>. La stima del processo è stata effettuata con un algoritmo di ottimizzazione che determina i valori dei coefficienti  $a$  e  $b$  tali da rendere minima la somma dei quadrati degli scarti tra le  $\Delta L(t)$  effettive e quelle stimate. I risultati ottenuti sono stati verificati con la stima con i minimi quadrati del modello di regressione lineare coerente con il processo OU:

Da  $\Delta L(t) = a[b - L(t-1)]\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} = L(t) - L(t-1)$  si può scrivere

$$L(t) = L(t-1) + ab\Delta t - aL(t-1)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} =$$

$$L(t) = ab\Delta t + (1-a)L(t-1) + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \text{ e ponendo } \Delta t = 1 \text{ si ha}$$

$$L(t) = ab + (1-a)L(t-1) + \sigma\varepsilon$$

Il modello di regressione stimato è quindi un autoregressivo del

primo ordine  $L(t) = \alpha + \beta L(t-1) + \nu$ , con parametri riconducibili a

$$\beta = 1 - a; \quad a = 1 - \beta; \quad \alpha = ab; \quad b = \alpha / (1 - \beta); \quad \nu = \sigma\varepsilon$$

I due approcci hanno prodotto gli stessi risultati. I grafici inclusi in Appendice mettono a confronto la dinamica delle  $\Delta L(t)$  con le stime generate dai processi OU settoriali.

La tabella 1 riporta i valori medi e gli scarti quadratici medi delle serie storiche della Liquidità Complessiva e della sua variazione nei singoli settori manifatturieri (valori non in percentuale):

<sup>29</sup> Come variabile di ciclo è stato usato il Valore Aggiunto Istat a prezzi costanti dei diversi settori industriali; tale variabile è risultata statisticamente poco significativa nella maggior parte dei settori Mediobanca e per tale motivo si è preferito non ricorrere a modelli *time-varying* ma usare modelli a coefficienti costanti. Il modello a coefficienti *time-varying* può essere sviluppato secondo le seguenti linee, in cui  $F(t)$  indica la variabile macro-industriale (una sola per semplicità):

$$L(t) = \lambda + \gamma F(t) + \delta_t, \text{ mentre la variabile macro varia con } dF(t) = g[h - F(t-1)]dt + \sigma_F dW_F$$

Differenziando  $L(t)$  si ha  $dL(t) = \gamma dF(t) + d\delta_t$  e sostituendo  $dF(t)$  si ottiene

$$dL(t) = \gamma \{ g[h - F(t-1)]dt + \sigma_F dW_F \} + d\delta_t = g[\gamma h - \gamma F(t-1)]dt + \gamma \sigma_F dW_F + d\delta_t$$

$$\text{ponendo } \gamma F(t-1) = L(t-1) - \lambda - \delta_{t-1} \text{ si ha } dL(t) = g[\gamma h - L(t-1) + \lambda + \delta_{t-1}]dt + \gamma \sigma_F dW_F + d\delta_t$$

sostituendo  $dt = \Delta t$ ,  $a = g$ ,  $b_t = \gamma h + \lambda + \delta_{t-1}$ ,  $\sigma_t \varepsilon \sqrt{\Delta t} = \gamma \sigma_F dW_F + d\delta_t$  si ottiene nel discreto

$$\Delta L(t) = a[b_t - L(t-1)]\Delta t + \sigma_t \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \text{ in cui } b_t \text{ e } \sigma_t \text{ sono } \textit{time-varying} \text{ in base alle}$$

sostituzioni riportate sopra. Nelle elaborazioni  $b_t$  e  $\sigma_t$  sono considerati costanti:

$$\Delta L(t) = a[b - L(t-1)]\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Tabella 1 - Valori medi e volatilità				
	Liquidità Complessiva [L(t)]		Variazione Liquidità Complessiva [ $\Delta L(t)$ ]	
	Media	SQM	Media	SQM
Abbigliamento	0.0758	0.0386	0.0019	0.0411
Alimentare	0.0682	0.0214	0.0015	0.0227
Cartario	0.0210	0.0479	-0.0003	0.0616
Chimico	0.0667	0.0562	-0.0006	0.0797
Mezzi Trasp.	0.0049	0.0399	0.0007	0.0567
Elettrodomestici	0.0436	0.0505	-0.0027	0.0645
Elettronico	0.0467	0.0372	0.0035	0.0575
Farmaceutico	0.0699	0.0459	0.0040	0.0486
Gomma-Cavi	0.0374	0.0480	-0.0008	0.0676
Stampa-Editoria	0.0837	0.0443	0.0018	0.0519
Meccanico	0.0633	0.0308	0.0040	0.0148
Prodotti Edilizia	0.0456	0.0318	0.0049	0.0438
Metallurgico	0.0192	0.0375	0.0031	0.0417
Tessile	0.0817	0.0359	0.0025	0.0314
Vetro	0.0508	0.0586	0.0010	0.0788
Pelli-Cuoio	0.0771	0.0520	0.0056	0.0523
Legno-Mobili	0.0594	0.0308	0.0048	0.0354
Impiantistica	0.0344	0.0246	0.0018	0.0265
Soc Diverse	0.0274	0.0615	0.0038	0.0849
MANIFATTURIERI	0.0446	0.0212	0.0022	0.0183

Nella tabella successiva sono raccolti i parametri dei processi *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck stimati nei diversi settori manifatturieri:

Tabella 2 - Parametri dei processi mean-reverting

	Velocità di mean reversion (a)	Media di lungo periodo (b)	Volatilità ( $\sigma\epsilon$ )
Ornstein-Uhlenbeck			
Abbigliamento	0.5413	0.0781	0.0352
Alimentare	0.5435	0.0696	0.0197
Cartario	0.7944	0.0198	0.0478
Chimico	0.9655	0.0652	0.0572
Mezzi Trasp.	0.9711	0.0046	0.0408
Elettrodomestici	0.7904	0.0410	0.0499
Elettronico	1.2911	0.0503	0.0303
Farmaceutico	0.5450	0.0744	0.0420
Gomma-Cavi	0.9645	0.0355	0.0484
Stampa-Editoria	0.6606	0.0857	0.0424
Meccanico	0.1543	0.0875	0.0140
Prodotti Edilizia	1.0734	0.0464	0.0320
Metallurgico	0.6007	0.0212	0.0357
Tessile	0.3738	0.0870	0.0284
Vetro	0.8608	0.0514	0.0594
Pelli-Cuoio	0.5644	0.0861	0.0429
Legno-Mobili	0.7029	0.0633	0.0292
Impiantistica	0.5738	0.0350	0.0231
Soc Diverse	0.9262	0.0288	0.0626
MANIFATTURIERI	0.3425	0.0493	0.0169

Considerando l'intero arco temporale dei 22 anni di serie disponibili e interpretando il coefficiente b come valore di equilibrio di lungo periodo della capacità di generazione di liquidità complessiva, i settori con la migliore produzione media di cassa sono il meccanico, tessile, stampa ed editoria, pelli e cuoio, farmaceutico, abbigliamento e alimentare, mentre il settore maggiormente in difficoltà è quello della costruzione di mezzi di trasporto. La velocità di ritorno verso la media di lungo periodo della variabile L è molto eterogenea tra i diversi settori; l'elettronico e i prodotti per l'edilizia sono i due settori con valori del parametro a superiori a 1, che segnala tendenziali *overreactions* dei processi che li riguardano.

La stima della probabilità di default, intesa in questo lavoro come probabilità di crisi di illiquidità, è stata ottenuta generando la stima della variazione della Liquidità Complessiva per l'anno 2019 [ $\Delta L(2019)$ ] con i modelli OU<sup>30</sup> dei singoli settori, che è stata successivamente aggiunta alla Liquidità Complessiva dell'ultimo anno osservato [ $L(2018)$ ], ottenendo la Liquidità Complessiva disponibile per il 2019 [ $L(2019)=L(2018)+\Delta L(2019)$ ]. Tale valore è messo a confronto con la stima della quota di rimborso dei debiti [ $R(2019)$ ] che le imprese dovrebbero pagare nel corso del 2019. La probabilità di illiquidità a 1 anno è stata quindi calcolata come:

$$PD(2019) = \Phi\left(\frac{R(2019) - L(2019)}{\sigma}\right), \text{ ove } \Phi(\cdot) \text{ indica la distribuzione}$$

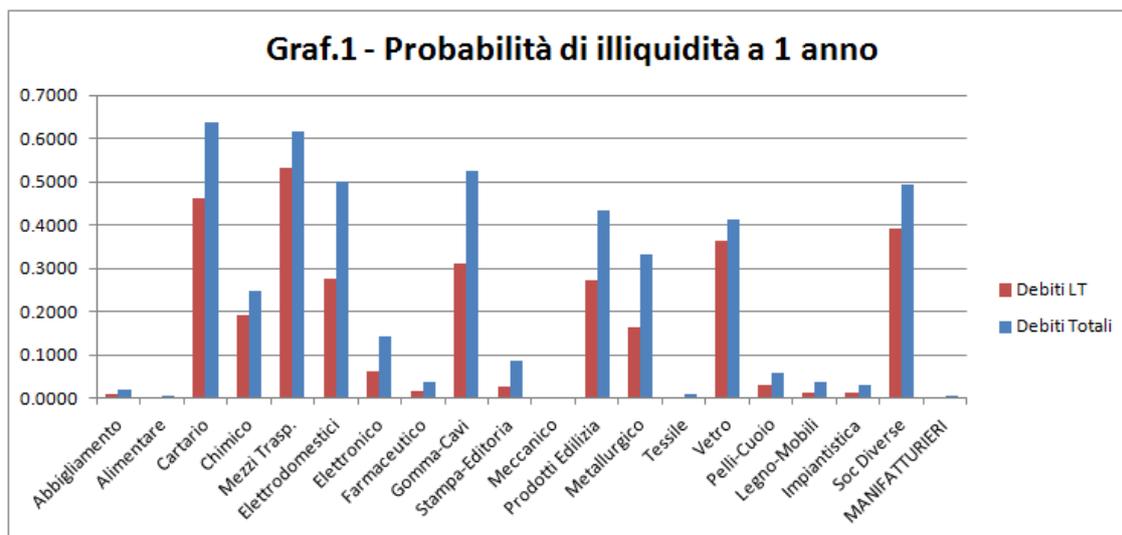
*cumulata normale standard e  $\sigma$  è la volatilità del processo O-U*

<sup>30</sup> Il ricorso ai modelli di regressione genera esattamente gli stessi risultati.

Come si vede la PD (probabilità di illiquidità) a 1 anno è stata stimata supponendo che i processi OU siano di tipo gaussiano, per semplicità. Le osservazioni disponibili sulle variazioni di  $L(t)$  (20) non sono sufficienti per una determinazione statisticamente robusta della forma delle distribuzioni nei vari settori e quindi l'assunzione di distribuzioni gaussiane va considerata come una prima approssimazione delle probabilità del verificarsi di crisi di carenza di liquidità. La tabella 3 e il grafico 1 riportano le probabilità di illiquidità a 1 anno nei vari settori (dati non in percentuale):

Probabilità illiquidità	Debiti LT	Debiti Totali
Abbigliamento	0.0098	0.0217
Alimentare	0.0004	0.0059
Cartario	0.4630	0.6376
Chimico	0.1907	0.2497
Mezzi Trasp.	0.5328	0.6160
Elettrodomestici	0.2769	0.5009
Elettronico	0.0638	0.1426
Farmaceutico	0.0180	0.0392
Gomma-Cavi	0.3116	0.5247
Stampa-Editoria	0.0289	0.0875
Meccanico	0.0000	0.0000
Prodotti Edilizia	0.2729	0.4356
Metallurgico	0.1644	0.3313
Tessile	0.0015	0.0113
Vetro	0.3637	0.4125
Pelli-Cuoio	0.0310	0.0605
Legno-Mobili	0.0125	0.0373
Impiantistica	0.0131	0.0296
Soc Diverse	0.3903	0.4925
MANIFATTURIERI	0.0005	0.0063

Nella tabella sono anche indicate per un confronto di sensibilità le PD calcolate sulle quote di rimborso stimate sul totale dei debiti finanziari (colonna 2). I settori meccanico, alimentare e tessile hanno livelli irrilevanti di rischio che si verifichi nel corso del 2019 una carenza di disponibilità a fronte degli impegni stimati nei confronti dei creditori finanziari. Per contro i settori della costruzione di mezzi di trasporto, cartario, vetro, gomma e cavi, elettrodomestici, prodotti per l'edilizia, chimica e metallurgia hanno significative probabilità di crisi di illiquidità, che possono essere superate solo con il ricorso a fonti aggiuntive a quelle generate dalla gestione (dell'anno e degli anni precedenti [sotto forma di liquidità di inizio periodo]) ovvero con nuovo indebitamento e/o interventi degli azionisti.



## 6 CONCLUSIONI

La riforma della legislazione fallimentare introdotta con il Decreto Legislativo n.14 del 12 gennaio 2019 ha innovato le norme sulla prevenzione e risoluzione delle crisi d'impresa, con l'obiettivo di individuare tempestivamente l'emergere delle situazioni di difficoltà, in modo da impedirne il peggioramento, facilitarne la soluzione e favorire la continuità aziendale. La riforma ha introdotto a questo fine un sistema di allerta di cui le imprese devono dotarsi per la individuazione e rilevazione dei sintomi che possono preludere a crisi che rischiano di comprometterne la sopravvivenza.

Ad avviso di chi scrive il punto cruciale della individuazione degli stati di difficoltà delle imprese riguarda la distinzione tra crisi transitorie, crisi strutturali il cui superamento non può che prevedere profonde ristrutturazioni e crisi irreversibili. In tale contesto separare i problemi derivanti da fasi di illiquidità da quelli che emergono da insufficiente solvibilità appare cruciale per predisporre i piani per il superamento delle difficoltà.

Questo lavoro ha affrontato la dicotomia tra solvibilità e liquidità dal punto di vista della teoria finanziaria, a partire dai modelli di struttura finanziaria basati sulla dinamica dell'EBIT. La valutazione dei rischi di potenziali illiquidità ha richiesto l'esplicitazione dei processi stocastici che sembrano idonei a descrivere in senso probabilistico l'evoluzione dei flussi di cassa aziendali. Un'applicazione ai Dati Cumulativi di Mediobanca ha consentito di pervenire a una prima approssimata valutazione dei rischi aggregati di illiquidità nei singoli settori manifatturieri censiti nella pubblicazione.

L'analisi delle possibili crisi di illiquidità in ottica pluriennale e il confronto tra rischi di solvibilità e rischi di liquidità verranno affrontati in un lavoro successivo.

## 7 BIBLIOGRAFIA

- Ammann, M., & Genser, M. (2004a). *A testable EBIT-based credit risk model* (Working Paper January 13). St. Gallen, CH: Swiss Institute of Banking and Finance University of St. Gallen Rosenbergstr. Disponibile da [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=498803](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=498803)
- Ammann, M., & Genser, M. (2004b). *A testable credit risk framework with optimal bankruptcy, taxes and a complex capital structure* (Working Paper February) St. Gallen, CH: Swiss Institute of Banking and Finance University of St. Gallen Rosenbergstr.
- Ammann, M., & Genser, M. (2005). *Making structural credit risk models testable: introducing complex capital structure*. (Working Paper March).

- Anderson, R., & Sundaresan, S. (1996). Design and valuation of debt contracts. *The Review of Financial Studies*, 9(1), pp. 37-68.
- Black, F., & Cox, J. (1976). Valuing corporate Securities. *The Journal of Finance*, 31(29), pp. 351-367.
- Bruner, R., & Eades, K. (1992). The crash of the Revco Leveraged Buyout: the hypothesis of inadequate capital. *Financial Management*, 21 (1), pp. 35-49.
- Capinski, M. (2007). A model of credit risk based on cash flow. *Computer and Mathematics with Applications*, 54(4), pp. 499-506.
- Chen, T., & Liao, H. (2004). *A cash flow based multi-period credit risk model*. (Working Paper August 20) Disponibile da <https://pdfs.semanticscholar.org/a3de/356ca73b31ad40737d73a21985f20946f01c.pdf>
- Chen, T., Liao, H., & Wu, C. (2009a). *A flow-based corporate credit model*. (Working Paper). Disponibile da <https://link.springer.com/article/10.1007/s11156-010-0186-z>
- Chen, T., Liao, H., & Wu, C. (2009b). *Internal liquidity risk in corporate bond yield spreads: bond- and market-level evidence*. (Working Paper January 12). Disponibile da [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1362409](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1362409)
- Donaldson, G. (1961). *Corporate debt capacity: a study of corporate debt policy and the determination of corporate debt capacity*. Boston: Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University.
- Donaldson, G. (1962). New framework for corporate debt policy. *Harvard Business Review*, 2, (ristampato nella stessa rivista nel n. 5 del 1978).
- Duffie, D., & Singleton, K. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12(4), pp. 687-720.
- Ericsson, J. (2000). Asset substitution, debt pricing, optimal leverage and maturity. *Finance*, 21(2), pp. 39-70.
- Fischer, E., Heinkel, R., & Zechner J. (1989). Dynamic capital structure choice: theory and tests. *The Journal of Finance*, 44(1), pp. 19-40.
- Genser, M. (2005). *A Kalman filter approach for structural firm value models*. (Working Paper May 3). Bergen, NO. Institutt for foretaksøkonomi Norges Handelshøyskole Helleveien. Disponibile da [https://pdfs.semanticscholar.org/8792/d0e2986704dcc7e99967a98a1e9cc0cd19f8.pdf?\\_ga=2.259509257.2062061792.1573466662-681284571.1573466662](https://pdfs.semanticscholar.org/8792/d0e2986704dcc7e99967a98a1e9cc0cd19f8.pdf?_ga=2.259509257.2062061792.1573466662-681284571.1573466662)
- Genser, M. (2006). *A structural framework for the pricing of corporate securities*. Berlin: Springer.
- Goldstein, R., Ju, N., & Leland, H. (2001). An EBIT-based model of dynamic capital structure. *The Journal of Business*, 74(4), pp. 483-512.
- Kane, A., Marcus, A., & McDonald, R. (1985). Debt policy and the rate of return premium to leverage. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20(4), pp. 479-499.
- Kim, J., Ramaswamy, K., & Sundaresan, S. (1993). Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds?. *Financial Management*, 22(3), pp. 117-131.
- Kutzker, T., & Schreiter, M. (2019). *The optimal capital structure under risk of illiquidity and over-indebtedness in a double barrier option framework*. (Working Paper January 7). Disponibile da <http://docplayer.net/134742489-The-optimal-capital-structure-under-risks-of-illiquidity-and-over-indebtedness-in-a-double-barrier-option-framework.html>
- Jankensgard, H. (2008). *Cash Flow-at-Risk and debt capacity*. (Working Paper November 19). Disponibile da [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1304108](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1304108)
- Leland, H. (1994). Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure. *The Journal of Finance*, 49(4), pp. 1213-1252.
- Liao, H., & Chen, T. (2004). *A solvency based multi-period corporate liquidity crisis prediction model*, (Working Paper November 30). Disponibile da <https://pdfs.semanticscholar.org/b296/1b5a22bed8aa1f2d9be4f6f50eacffe590d2.pdf>
- Liao, H., & Chen, T. (2005a). *A multi-period corporate credit model: an intrinsic valuation approach*. (Working Paper April 24). Disponibile da

- [https://pdfs.semanticscholar.org/dee3/a075b70c8c50def71a3d92b48ddd5d228847.pdf?\\_ga=2.64840492.2062061792.1573466662-681284571.1573466662](https://pdfs.semanticscholar.org/dee3/a075b70c8c50def71a3d92b48ddd5d228847.pdf?_ga=2.64840492.2062061792.1573466662-681284571.1573466662)
- Liao, H., & Chen, T. (2005b). *A solvency based multi-period corporate short-term credit risk model*. (Working Paper May 9). Disponibile da [http://www.defaultrisk.com/pp\\_liqty\\_31.htm](http://www.defaultrisk.com/pp_liqty_31.htm)
- Liao, H., & Chen, T. (2006). *A cash flow based corporate credit portfolio analysis: a conditional independent default approach*. (Working Paper). Disponibile da [https://pdfs.semanticscholar.org/3704/275c544e6d70c37a312d53866c63989ea867.pdf?\\_ga=2.224710425.2062061792.1573466662-681284571.1573466662](https://pdfs.semanticscholar.org/3704/275c544e6d70c37a312d53866c63989ea867.pdf?_ga=2.224710425.2062061792.1573466662-681284571.1573466662)
- Liao, H., Chen, T., & Chou, T. (2005). *Multi-period corporate short-term credit risk assessment: a state-dependent stochastic liquidity balance model*. (Working Paper June 27). Disponibile da [https://pdfs.semanticscholar.org/ab63/662b0cbb8aec91a08bab61ac43ce22a45288.pdf?\\_ga=2.59731758.2062061792.1573466662-681284571.1573466662](https://pdfs.semanticscholar.org/ab63/662b0cbb8aec91a08bab61ac43ce22a45288.pdf?_ga=2.59731758.2062061792.1573466662-681284571.1573466662)
- Liao, H., Chen, T., & Wu, C. (2004). *Estimating multi-period corporate credit risk: a cash flow based approach* (Working Paper May 15). Disponibile da [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=971771](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=971771)
- Longstaff, F., & Schwartz, E. (1995). *A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt*. *The Journal of Finance*, 50(3), pp. 789-819.
- Madan, D., & Unal, H. (1998). Pricing the risks of default. *Review of Derivative Research*, 2(2-3), pp. 121-160.
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt. *The Journal of Finance*, 29(2), pp. 449-470.
- Simonian, J. (2012). An EBIT-based variant of the model Duffie-Lando credit risk model. *Applied Economics Letters*, 19(1), pp. 57-60.
- Stein, J., Usher, S., LaGattuta, D., & Youngen, J. (2001). A comparable approach to measuring Cash-Flow-at-Risk for non-financial firms. *The Journal of Applied Corporate Finance*, 13(4), pp. 8-17.
- Uhrig-Homburg, M. (2005). Cash-flow shortage as an endogenous bankruptcy reason. *The Journal of Banking & Finance*, 29(6), pp.1509-1534.
- Varetto, F. (2014). *La crisi finanziaria nei bilanci delle imprese: una nota con i dati Mediobanca*, (Working Paper 11). Moncalieri, ITA. CNR-CeRIS. Disponibile da <https://ideas.repec.org/p/csc/cerisp/201411.html>
- Wruck, K. (1990). Financial distress, reorganization and organizational efficiency. *The Journal of Financial Economics*, 27(2), pp. 419-444.

